Krzysztof PETELCZYC
Uniwersytet w Białymstoku
Instytut Matematyki, Zakład Podstaw Geometrii
ul. Akademicka 2, 15-267, Białystok
tel./ fax: 0-85 745 75 52, e-mail: kryzpet@math.uwb.edu.pl

PARY MÖBIUSA

Słowa kluczowe: konfiguracja Möbiusa, n -sympleks, przestrzeń rzutowa, automorfizm.

Konfiguracją Möbiusa nazywa się konfigurację w 3-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej zawierającą dwa, wzajemnie w siebie wpisane i na sobie opisane czworościany. Każdy wierzchołek jednego czworościanu leży na ścianie (płaszczyźnie) drugiego czworościanu i vice versa. Taka konfiguracja składa się z 8 punktów (wierzchołków) i 8 bloków (ścian) takich, że każdy blok zawiera 4 punkty i każdy punkt zawarty jest w 4 blokach.

Z [2] wiemy, że istnieje pięć 8_4 -konfiguracji, w których co najwyżej dwie ściany mają dwa punkty wspólne, oraz dualnie: co najwyżej dwa punkty są wspólne dla dwóch ścian. Konfiguracje spełniające powyższy warunek są dokładnie tymi, które zawierają dwa wpisane w siebie wzajemnie i na sobie opisane czworokąty.

Tego typu konfigurację można uogólnić dla przestrzeni n -wymiarowej rozważając dwa n -sympleksy zamiast czworościanów. Otrzymaną w ten sposób strukturę nazywamy *parą Möbiusa* (jak w [1]) n *-sympleksów* lub krócej n *-parą Möbiusa*. Sposób wpisania w siebie sympleksów (jak i cała konstrukcja) daje się dobrze przedstawić w ujęciu kombinatorycznym. Rozważmy dwa rozłączne n -elementowe zbiory A i B. Utożsamiamy wierzchołki jednego z sympleksów z elementami zbioru A, oraz wierzchołki drugiego sympleksu z elementami zbioru B. Wówczas ścianom sympleksów odpowiadają $(n-1)$-elementowe podzbiory zbiorów A oraz B. Rozważamy także permutację φ zbioru n -elementowego, która przypisuje wierzchołki jednego z sympleksów ścianom drugiego z nich. W efekcie otrzymujemy kombinatoryczną konfigurację, którą oznaczamy $M_{(n,\varphi)}$.

W [4] dowiedzione zostało, że klasyczna konfiguracja Möbiusa (czyli $M_{(4,id)}$) jest realizowalna w 3-wymiarowej przestrzeni rzutowej wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń ta jest nad ciałem przemiennym. W pracy [1] pokazano, że niezdegenerowane pary Möbiusa istnieją w przestrzeniach rzutowych nieparzystego wymiaru.

Ilość parami nieizomorficznych konfiguracji $M_{(n,\varphi)}$ odpowiada liczbie klas sprzężoności grupy S_n . Ustalamy przy jakich założeniach $M_{(n,\varphi)}$ zawiera n -pary Möbiusa różne od wyjściowej n -pary Möbiusa, która określa $M_{(n,\varphi)}$. Co więcej, okazuje się, że dla $k<n$ k -para Möbiusa może być podkonfiguracją w $M_{(n,\varphi)}$.

Z oryginalnej pracy Möbiusa [3] wiemy, że rząd grupy automorfizmów konfiguracji $M_{(4,id)}$ wynosi 192. Wyznaczamy automorfizmy i ich strukturę grupową dla pozostałych konfiguracji typu $M_{(n,\varphi)}$.

Literatura:

[1] Havlicek H., Odehnal B., Saniga M.: ,,Möbius pairs of simplices and commuting Pauli operators'', Math. Pannon. 21, 115-128, 2010.

[2] Hilbert D., Cohn-Vossen P.: ,,Anschauliche Geometrie'', Springer Verlag, Berlin, 1932.

[3] Möbius A. F.: ,,Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden einejede in Bezug auf die ander um- und eingeschriehen zugleich heissen?'', Journal für die reine und angewandte Mathematik 3: 273–278, 1828.

[4] Witczyński K.: ,,Möbius' theorem and commutativity'', J. Geom. 59, 182-183, 1997.