Piotr DUDZIK
Politechnika Śląska
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
ul. Krzywoustego 7, 44-100, Gliwice
tel./ fax: 32 237 26 81 e-mail: piotr.dudzik@polsl.pl
Edwin KOŹNIEWSKI
Politechnika Białostocka
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Zakład Informacji Przestrzennej
ul. Wiejska 45E, 15-351, Białystok
tel./ fax: 85 746 95 59 e-mail: e.kozniewski@pb.edu.pl

GEOMETRYCZNE WSKAŹNIKI ZWARTOŚCI BUDYNKU

Słowa kluczowe: *zwartość bryły geometrycznej, zwartość budynku, bryły platońskie, wielokąt prostokątny, defekt obwodu, defekt pola*

W pracy [3], analizując geometrię bryły budynku, wprowadzono pojęcie geometrycznej zwartości jako „ilorazu powierzchni przegród zewnętrznych i objętości budynku". Wskaźnik ten pokazuje jak dużo materiału budowlanego należy zużyć w celu otrzymania określonej kubatury budynku. Jest to jednak wartość mianowana i ponadto zależy od przyjętej jednostki miary.

W opracowaniu zaproponowane zostaną różne sposoby określania *względnego wskaźnika zwartości bryły geometrycznej*.

Względny wskaźnik zwartości bryły geometrycznej względem sześcianu. Jako pierwszy zostanie przedstawiony *względny wskaźnik zwartości bryły geometrycznej względem sześcianu*. Określa się go w następujący sposób. W domyśle bierzemy pod uwagę budynek (czyli bryłę graniastą) o podstawie wielokąta prostokątnego i mierzymy jego pole podstawy *A* (rzut, powierzchnia zabudowy), obwód *p* i dalej objętość (kubaturę) , pole powierzchni ścian (zewnętrznych) oraz pole powierzchni całkowitej $CA =$. Stosunek GC (Geometric Compactness of Solid), to potocznie zwartość, ale wyrażająca się w jednostkach [1/m].

Weźmy teraz pod uwagę sześcian o krawędzi długości *a*, zwartość geometryczna sześcianu wyraża się ilorazem (Geometric Compactness of Cube)

$$GCC = \frac{6a^2}{a^3} = \frac{6}{a} \quad (1)$$

Załóżmy teraz, że bryła budynku o kubaturze jest sześcienna i wyznaczmy długość krawędzi sześcianu. Mamy i stąd $\sqrt[3]{A \cdot h}$. Wówczas pole powierzchni sześcianu wyraża się w postaci CA^{*} :. Zatem zwartość geometryczna takiego sześcianu jest równa

$$\frac{CA^{*}}{V^{*}} = \frac{6}{(A \cdot h)^{\frac{1}{3}}} \quad (2)$$

Stąd, wobec , możemy wyznaczyć stosunek pól powierzchni (całkowitej) bryły sześcianu do bryły rozważanego budynku. Otrzymany wówczas iloraz

$$RC = GCC : GCS = \frac{6(A \cdot h)^{\frac{2}{3}}}{V^{*}} : \frac{p \cdot h + 2A}{V} = \frac{6(A \cdot h)^{\frac{2}{3}}}{p \cdot h + 2A} \quad (3)$$

jest zwartością względną bryły (Relative Compactness) odniesioną do sześcianu. Iloraz (3) możemy uznać za zwartość bryły graniastosłupa o podstawie o polu *A*, obwodzie *p* i wysokości *h* liczoną względem sześcianu. Jest to względna zwartość geometryczna *RC* budynku, o której mówi się w literaturze [2].

Zwartość bryły względem prostopadłościanu o podstawie kwadratu i wysokości równej wysokości tej bryły. Weźmy teraz pod uwagę prostopadłościan o podstawie kwadratu o krawędzi długości *a* i wysokości *h*, zwartość geometryczna prostopadłościanu wyraża się ilorazem (Geometric Compactness of Cuboid)

$$GCCd = \frac{2a^2 + 4a \cdot h}{a^2 h} = \frac{2a + 4h}{ah} \quad (4)$$

Załóżmy, że bryła budynku o kubaturze jest graniastosłupem o dowolnej podstawie i wyznaczmy długość krawędzi kwadratu podstawy prostopadłościanu. Mamy c i stąd a :. Wówczas pole powierzchni prostopadłościanu $CAC^{*} = 4$. Zatem

$$\frac{CAC^{*}}{V^{*}} = \frac{4A^{\frac{1}{2}}h + 2A}{A \cdot h} = \frac{4h + 2A^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}} \cdot h} \quad (5)$$

Stąd, wobec , możemy wyznaczyć stosunek pól powierzchni (całkowitej) bryły prostopadłościanu do bryły graniastosłupa o dowolnej podstawie (rozważanego budynku). Otrzymamy wówczas iloraz (Relative Compactness of solid with relation to Cuboid)

$$RCC = GCCd:GCS = \frac{4A^{\frac{1}{2}}h + 2A}{V^{*}} : \frac{p \cdot h + 2A}{V} = \frac{4A^{\frac{1}{2}}h + 2A}{p \cdot h + 2A} \qquad (6)$$

Dla prostopadłościanu o wymiarach *a, b, h* otrzymamy

$$RCC = \frac{4(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}h + 2a \cdot b}{2(a+b) \cdot h + 2a \cdot b} \qquad (7)$$

Iloraz (7) możemy uznać za *zwartość bryły* graniastosłupa o dowolnej podstawie o polu *A*, obwodzie *p* i wysokości *h liczoną względem prostopadłościanu o podstawie kwadratu i wysokości h*.

Geometryczna zwartość bryły mierzona zwartością podstawy. Można wreszcie zrezygnować z wysokości budynku oraz powierzchni podstaw bryły: dolnej i górnej. Stąd optymalizacja powierzchni obejmować będzie jedynie kształt podstawy (planu budynku). Wtedy zwartość geometryczna podstawy (wzorcowego kwadratu) wyraża się ilorazem (Geometric Compactness of Base-Square)

$$GCS = \frac{4a}{a^2} = \frac{4}{a} \qquad (8)$$

Natomiast zwartość danej figury podstawy o polu *A* i obwodzie *p* wyraża się ilorazem . Ponieważ , mamy a :. Wówczas (8) przyjmuje postać

$$GCS = \frac{4}{\sqrt{A}} \qquad (9)$$

Stąd, wobec , możemy wyznaczyć stosunek pól powierzchni (podstawy) kwadratu do podstawy (rozważanego budynku). Otrzymujemy iloraz (Relative Compactness of solid with relation to Base)

$$RCB = GCS:GCR = \frac{4}{\sqrt{A^{*}}} : \frac{p}{A} = \frac{4A^{\frac{1}{2}}}{p} \qquad (10)$$

Dla prostokąta o wymiarach *a, b* otrzymamy

$$RCB = \frac{2(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}{a+b} \qquad (11)$$

Względny wskaźnik zwartości bryły geometrycznej względem kuli. Weźmy teraz pod uwagę kulę o promieniu długości *r*, zwartość geometryczna kuli wyraża się ilorazem (Geometric Compactness of Sphere)

$$GCSph = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r} \qquad (12)$$

Załóżmy teraz, że bryła budynku o kubaturze jest kulista i wyznaczmy długość promienia kuli. Mamy $\frac{4}{3}\pi$ i stąd $r =$. Zatem zwartość geometryczna takiej kuli jest równa

$$GCSph = \frac{3}{\left(\frac{3}{4\pi}A \cdot h\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad (13)$$

Stąd, wobec , możemy wyznaczyć stosunek pól powierzchni (całkowitej) kuli do bryły rozważanego budynku. Otrzymany wówczas iloraz

$$RCS = GCC:GCS = \frac{4\pi\left(\frac{3}{4\pi}A \cdot h\right)^{\frac{2}{3}}}{V^{*}} : \frac{p \cdot h + 2A}{V} = \frac{(36\pi)^{\frac{1}{3}}(A \cdot h)^{\frac{2}{3}}}{p \cdot h + 2A} \qquad (14)$$

jest zwartością względną bryły odniesioną do kuli. Iloraz (14) możemy uznać za *zwartość bryły* graniastosłupa o podstawie o polu *A*, obwodzie *p* i wysokości *h liczoną względem kuli*. Jest to *względna zwartość geometryczna RC* bryły (budynku), o której mówi się w literaturze [2]. Współczynnik we wzorze (14), równa w przybliżeniu 4,84, wyraża stosunek pola powierzchni kuli do jej objętości, przy założeniu, że objętość ta jest równa 1. Podobnie wartość 6 we wzorze (3) wyraża stosunek pola powierzchni sześcianu do jego objętości, przy założeniu, że objętość tego sześcianu jest równa 1. Zwartość kuli jest więc większa (wartość stosunku 4,84 - mniejsza) niż sześcianu (wartość stosunku 6 - większa). Dla ilustracji wartości te dla poszczególnych brył platońskich są równe: dla czworościanu – 7,21; sześcianu – 6; ośmiościanu – 5,72; dwunastościanu – 5,31; dwudziestościanu – 5,148; kuli – 4,836. Kula jest więc najbardziej zwartą („oszczędną w budulec") bryłą.

Do oceny zwartości obiektów budowlanych (budynków) spośród brył platońskich wybierany jest sześcian z uwagi prostopadłość ścian. Wskaźniki geometrycznej zwartości brył odniesione do sześcianu mają uniwersalny i jednoznaczny charakter. Nie dają jednak obiektywnej oceny proporcji zwartości bryły (budynku). Proporcję zwartości pokazują dopiero wskaźniki (*RCC*) względnej zwartości budynku odniesione do prostopadłościanu o podstawie kwadratowej.

Wskaźniki zwartości brył, których podstawami są wielokąty prostokątne. Dalej zajmiemy się wielokątami prostokątnymi [1] wpisanymi w prostokąt (rys. 1). Mówić będziemy, że wielokąt prostokątny W_P (o bokach $x_1^b,\ldots,x_q^b,x_1,\ldots x_r,\ x_1^t,\ldots,x_s^t,\ y_1^l,\ldots,y_l^t,y_1,\ldots,y_u,\ y_1^r,\ldots,y_w^r$) jest *wpisany w prostokąt* P (o bokach x^b, y^r, x^t, y^l) wtedy i tylko wtedy, gdy i każdy bok prostokąta P zawiera przynajmniej jeden bok wielokąta W_P. By nie rozważać wielokątów zdegenerowanych i mieć dość szeroką klasę figur zakładać będziemy, że opisywane wielokąty są obszarami spójnymi, i ogólniej wielospójnymi (mogą mieć dziury) (rys. 1c). Spójność wielokąta (określana ogólnie dla zbioru płaskiego) oznacza, że dowolne dwa punkty wielokąta można połączyć łamaną (linią wielokątną [4]) zawartą we wnętrzu wielokąta. Spójność wielokąta W_P wpisanego w prostokąt P oznacza, że każda prosta równoległa do boków prostokąta P, zawierająca punkty wewnętrzne tego prostokąta zawiera także punkty wewnętrzne oraz punkty brzegowe wielokąta W_P (rys. 1). Wówczas każdy punkt brzegu prostokąta P jest rzutem co najmniej dwóch punktów brzegowych wielokąta W_P. Można więc bokami wielokąta W_P (po przesunięciu równoległym odpowiednio do osi *OX*, *OY* na brzeg prostokąta P) „wytapetować” brzeg prostokąta P (rys. 1a). Niektóre fragmenty „tapety” nałożą się wielokrotnie na siebie (rys. 1b,c). Stąd łatwo wynika, że długość obwodu wielokąta W_P jest większa lub równa długości obwodu prostokąta P. W pewnych przypadkach może być większa i wówczas do analizy kształtu przydatna będzie znajomość różnicy długości obwodów tych figur.

W z g l ę d n y d e f e k t o b w o d u w i e l o k ą t a p r o s t o k ą t n e g o. Jeżeli oznaczymy przez obwód obszaru F to, w odniesieniu do wielokąta W_P wpisanego w prostokąt P, możemy zapisać

$$p(W_P) = p(P) + \Delta p(W_P) \tag{15}$$

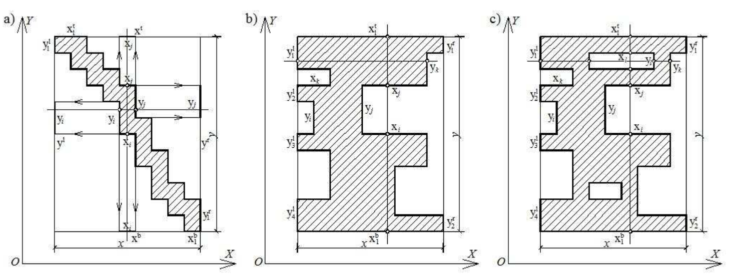
gdzie

$$\Delta p(W_P) = \sum_{i=0}^{n-1} 2i \cdot x_{2i+2} + \sum_{j=0}^{m-1} 2j \cdot y_{2j+2} \tag{16}$$

przy czym oznacza sumę miar rzutów prostokątnych na oś *OX* wszystkich części tych boków $x_l^b(x_k^t)$ wielokąta W_P równoległych do osi *OX*, które prostą równoległą do osi *OY* przecinają łącznie w 2*i* punktach, przy *i*=0,1,…,*n*-1 (rys. 1a), oznacza sumę miar rzutów prostokątnych na oś *OY* wszystkich części tych boków y_l^l (y_k^r) wielokąta W_P równoległych do osi *OY*, które prostą równoległą do osi *OX* przecinają łącznie w 2*j* punktach, przy *j*=0,1,…,*m*-1 (rys. 1b,c). Liczby 2*n* (2*m*) oznaczają maksymalną liczbę boków wielokąta W_P równoległych do osi *OX* (*OY*), które przecina prosta równoległa do osi *OY* (*OX*). Wielkość , określoną wzorem (15), nazywać będziemy *defektem obwodu* wielokąta W_P. Określony za pomocą wzorów (15), (16) defekt obwodu wielokąta W_P zależy od przyjętej jednostki miary długości i, tym samym, nie wyraża jednoznacznej miary różnicy między obwodem wielokąta prostokątnego i prostokąta. Stąd racjonalnym będzie określenie *względnego defektu obwodu* wielokąta W_P jako ilorazu

$$\delta_p(W_P) = \frac{\Delta p(W_P)}{p(P)} \tag{17}$$

a więc niemianowanej jednostki miary odchylenia długości obwodu wielokąta prostokątnego od opisanego na nim prostokąta. Z ekonomicznego i ekologicznego (oszczędność energii) punktu widzenia korzystne rozwiązanie projektowe budynku mamy wtedy, gdy względny defekt obwodu przyjmuje wartości bliskie zeru. Jednak pozostaje otwarta wielkość „strat” spowodowanych ewentualnym zmniejszeniem pola powierzchni wielokąta prostokątnego, a więc kubatury budynku. Tę wielkość „strat” odzwierciedla inny wskaźnik związany z polem wielokąta.



Rys. 1 Wielokąty prostokątne wpisane w prostokąt P (o bokach x^b, y^r, x^t, y^l) o wymiarach *x*×*y*

W z g l ę d n y d e f e k t p o l a w i e l o k ą t a p r o s t o k ą t n e g o. Drugim parametrem charakteryzującym geometrię wielokąta prostokątnego W_P jest jego pole . Pole wielokąta prostokątnego możemy wyrazić w postaci

$$\delta a(W_P) = a(P) - \Delta a(W_P) \tag{18}$$

gdzie możemy nazwać *defektem pola* wielokąta prostokątnego. Wtedy iloraz

$$\delta a(W_P) = \frac{\Delta a(W_P)}{a(P)} \tag{19}$$

nazywamy *względnym defektem pola* wielokąta prostokątnego W_P w odniesieniu do opisanego na nim prostokąta P. Wskaźnik ten wyraża procentowy udział „strat” powierzchni zabudowy (kubatury budynku) w stosunku do pola powierzchni prostokąta, a przy zachowaniu wielkości obwodu wielokąta prostokątnego (np. w przypadku normalnego wielokąta prostokątnego [4]) wyraża udział „strat” powierzchni zabudowy przy danych zasobach zużycia materiałów budowlanych przy wznoszeniu obiektu i zapotrzebowania na energię w czasie użytkowania budynku.

Literatura:

[1] Koźniewski E.: *Geometria dachów. Teoria i zastosowanie*. Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2007.

[2] Mahdavi A., Guterkin B.: *Shapes, Numbers, and Perception: Aspects and Dimensions of the Design Performance Space*. Proceedings of the 6th International Conference: Design and Decision Support Systems in Architecture, The Netherlands 2002, ISBN 90-6814-141-4, 291-300.

[3] Menkhoff H., Blum A., Trykowski M., Wente E., Zapke W.: *Energetisches Bauen*. Eergiewirtschaftliche Aspecte zur Planung und Gestaltung von Wohnegebauden, 04.086/1983, Schriftenreiche „Bau- und Wohnforschung" des Bundesministers fur Raumordnung, Bauwesen und Stadtebau, Bonn,1983.

[4] Preparata F.,P., Shamos M.,I.: *Geometria obliczeniowa. Wprowadzenie* (trans. Computational Geometry. An Introduction. Springer-Verlag New York, Inc. 1985). Wydawnictwo Helion, Gliwice, 2005.