

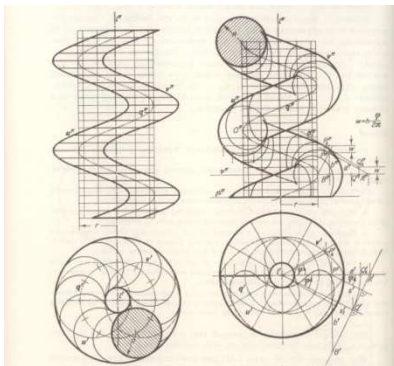
Edwin KOŹNIEWSKI, Marcin ORŁOWSKI

Białystok Technical University, Civil and Environmental Engineering Faculty,
Department of Spatial Information
Wiejska St. 45E, 15-351 Białystok, PL,
e-mail: e.kozniewski@pb.edu.pl, m.orlowski@pb.edu.pl

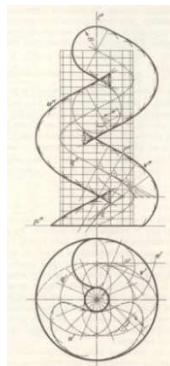
PRZEKSZTAŁCENIA 3D OPARTE NA PRZEKROJACH W PROGRAMIE AUTOCAD

KeyWords: *przekształcenie skręcające, zginające, zwężające, ścinające*

W klasycznej geometrii wykreślnej omawiane są konstrukcje takich obiektów geometrycznych jak: słupek skręcony, powierzchnia Saint-Gilles i powierzchnia kanałowa z linią śrubową jako krzywą prowadzącą [1] (rys. 1). Konstrukcje te prowadzą do sformułowania pojęcia tzw. przekształcenia opartego na przekrojach [2]. Wiele bowiem przekształceń bryły w przestrzeni trójwymiarowej, zwykle nieliniowych, można opisać w sposób następujący.



Rys. 1: Słupek skręcony – przekrój płaski – okrąg obraca dokoła punktów wyznaczonych w klasie płaszczyzn przez oś linii śrubowej (po lewej stronie), powierzchnia Saint-Gilles surface – okrąg znajduje się w płaszczyźnie południkowej (po prawej stronie) [1]



Rys. 2: Powierzchnia kanałowa – klasa płaszczyzn przekrojów jest generowana przez linię śrubową – płaszczyzny są prostopadłe do linii śrubowej [1]

Dokonyjemy przekrojów danego obiektu za pomocą pewnej klasy płaszczyzn, np. klasy płaszczyzn równoległych i następnie przekroje te przekształcamy w swoich płaszczyznach, np. przez obrót, przesunięcie, jednokładność, według przyjętego w klasie schematu. W ten sposób otrzymujemy nowy obiekt. Za autorami monografii [2] omówimy kilka takich przekształceń.

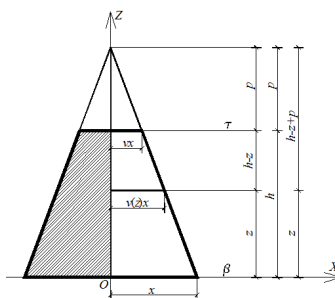
Najpierw omówimy przekształcenie skręcające [2]. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że obiekt znajduje się między płaszczyznami - dolną β i górną τ - prostymi do prostej a (nazywanej *osią skręcenia*) (rys. 8b). Przekroje obiektu płaszczyznami prostymi do a (równoległymi do β) obracamy dokoła prostej a w sposób następujący. Przekrój w płaszczyźnie dolnej β pozostaje bez zmian, zaś w płaszczyźnie górnej τ jest obrócony o dany kąt α_{max} . Zakładając, że odległość między płaszczyznami β i τ jest równa h , oś Oz układu współrzędnych zawiera prostą a , płaszczyzna β ma równanie $z=0$, kąt obrotu $\alpha(z)$ na wysokości z określamy następująco:

$$\alpha(z) = \frac{z}{h} \alpha_{max} \quad (1)$$

Przekształcenie to ma oczywisty związek linią śrubową i ruchem śrubowym. Obrazem każdej prostej, równoległej do prostej a jest linia śrubowa o osi a . Interesującą własnością przekształcenia skręcającego jest *zachowanie objętości* obiektu.



Rys. 3: Wieżowiec (2000-2005) w Malmö w Szwecji (architekt Santiago Calatrava) [2,3]



Rys. 4: Założenia do wyprowadzenia wzorów przekształcenia skręcającego

Przekształcenie zwężające [2]. Do opisu tego przekształcenia wybierzmy, podobnie jak wyżej, kartezjański układ współrzędnych, w którym prosta a pokrywa się z osią z zaś β jest płaszczyzną xy . Załóżmy, że kierunki płaskich przekształceń - powinowactw są równoległe do osi Ox i Oy . Wtedy w płaszczyźnie τ (która ma równanie $z = h$ (h jest odległością między płaszczyznami β i τ)) skalowanie (złożenie dwu powinowactw) ma postać $x' = v \cdot x$, $y' = w \cdot y$, gdzie v i w oznaczają stosunki powinowactw w płaszczyźnie τ odpowiednio w kierunkach osi Ox i Oy . Ponieważ przekształcenie w dolnej płaszczyźnie β jest tożsamościowe, przyjmujemy stosunki skali równe 1 w obu kierunkach. Zakładając ciągłą zmienność stosunków skal między płaszczyznami dolną i górną w zależności od z stosunek $v(z)$ powinowactwa w kierunku osi Ox jest równy

$$v(z) = 1 + \frac{z}{h}(v - 1). \quad (2)$$

Posługując się rysunkiem 4 możemy napisać proporcję

$$\frac{x}{h+p} = \frac{vx}{p} \rightarrow p = \frac{vh}{1-v}. \quad (3)$$

Korzystając z dalszych oznaczeń na rysunku 4 mamy implikację

$$\frac{v(z)x}{p+h-z} = \frac{v(z)x}{p} \rightarrow pv(z) = v(p+h-z) \quad (4)$$

i po podstawieniu (3) w (4) otrzymujemy formułę (5):

$$\frac{vh}{1-v}v(z) = v\left(\frac{vh}{1-v} + h - z\right) \rightarrow v(z) = 1 + \frac{z}{h}(v - 1). \quad (5)$$

Zgodnie ze wstępnym zamysłem, $v(0) = 1$ and $v(h) = v$. Zamieniając v na w , otrzymamy współczynnik skali w kierunku osi Oy . Na płaszczyźnie na wysokości z , skalowanie jest postaci $x' = v(z) \cdot x$, $y' = w(z) \cdot y$. Wstawiając wyrażenia (5) zamiast $v(z)$ i $w(z)$, dochodzimy do następującej postaci operacji zwężania:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{xz}{h}(v - 1) \\ y' &= y + \frac{yz}{h}(w - 1) \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (6)$$

Zważywszy, że wyrażenia $x \cdot z$, $y \cdot z$ znajdujące się po prawej stronie wzorów (6) są stopnia drugiego wnosimy, że przekształcenie zwężające jest przekształceniem kwadratowym.

Jeśli chcemy mieć efekty pogrubienia lub pocienienia obiektu bez utraty gładkości powierzchni możemy użyć przekształcenia w technice zwanego *wybrzuszaniem*. Przekształcenie wybrzuszania otrzymamy zakładając, że występujące w przekształceniu zwiążającym odpowiednie funkcje $v(z)$ i $w(z)$ są gładkie.

Przekształcenie *ścinające* [2]. Skręcanie powoduje obracanie przekrojów. Zwężenie i wybrzuszenie przekształca przekroje przez skalowanie, czyli przez złożenie dwu powinowactw. Przekształcenie *ścinające* przesuwa przekroje. Ponieważ przesunięcie jest jednoznacznie określone, gdy znamy obraz jednego punktu przekształcenie *ścinające* będzie określone, opiszemy obraz a' osi a . Przekształcenie *ścinające* jest jednoznacznie określone przez przekształcenie osi, polega na zmianie osi według przyjętej reguły. Przekształcenie *ścinające* nie zmienia kształtu przekroju a więc i pola. Zachowuje wysokość każdego przekroju, zatem na podstawie zasady Cavalieri'ego zachowuje objętość przekształcanego obiektu. W architekturze mamy przykłady zastosowania podobnej deformacji. Jest to budynek City Hall w Londynie zaprojektowany przez znanego architekta Normana Fostera.

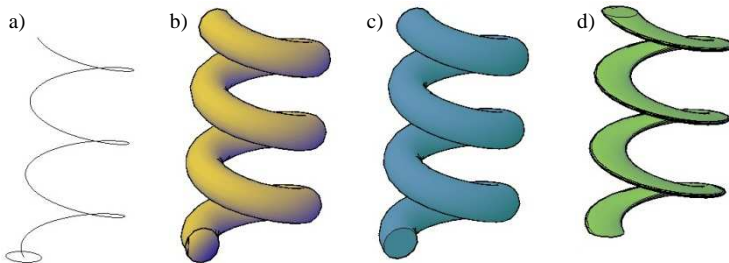
Przekształcenia *zginające* [2]. Omówione wyżej nieliniowe przekształcenie *ścinające* można zmodyfikować wykorzystując kolejny znany z mechaniki proces *zginania*. Dokonujemy takiej deformacji osi a przy której zmienia się nachylenie płaszczyzny przekroju do płaszczyzny poziomej (Oxy). Następuje więc jej *zginanie*. W elementarnym przypadku, gdy prostą a przekształcimy na okrąg a' , otrzymamy *zginanie radialne*. Płaszczyzny przekrojów pozostaną normalne do okręgu a' .

Możemy oczywiście dokonać ogólnej, dowolnej zmiany prostej a na dowolną krzywą (np. na krzywą Béziera) i ustawić przekroje prostopadłe do krzywej a' .

Implementacja omówionych przekształceń w programie AutoCAD zawarta jest w wielu proponowanych w aplikacji poleceniach. Zadawalające efekty można uzyskać drogą bezpośrednią lub pośrednią w zależności od złożoności transformacji: $a \rightarrow a'$.

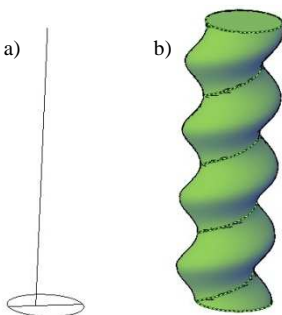
W dalszej części artykułu przedstawiamy próby realizacji wcześniej omówionych powierzchni i „prostych przekształceń” w programie AutoCAD 2012.

Implementację powierzchni „słupa kręconego”, powierzchni Saint-Gilles, oraz powierzchni kanałowej można otrzymać na kilka sposobów. Można wykorzystać do tego na przykład polecenie SWEEP z opcją Alignment (rys. 5).

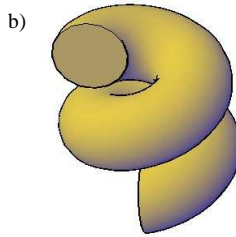
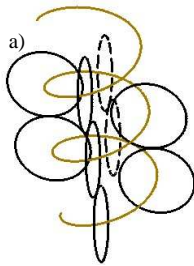


Rys. 5: Realizacja powierzchni z klasycznej geometrii wykreślnej: a) ścieżka i przekrój; b) powierzchnia Saint-Gilles; c) powierzchnia kanałowa; d) powierzchnia słupa kręconego (SWEEP z opcją Alignment)

Niestety funkcja SWEEP ma ograniczenia w przeciąganiu przekrojów, nie jesteśmy w stanie wymodelować obiektu gdy rozmiar przekroju powoduje wzajemne przenikanie się obiektu. W szczególności nie możliwe jest wygenerowanie, klasycznego w architekturze, słupa kręconego poprzez przeciąganie wzdłuż linii spiralnej. Jednakże słup kręcony możemy otrzymać gdy przeciągamy przekrój (okrąg) przez linię prostą (pionową), równocześnie obracając go dookoła punktu nie będącego środkiem danego okręgu (Rys. 6).



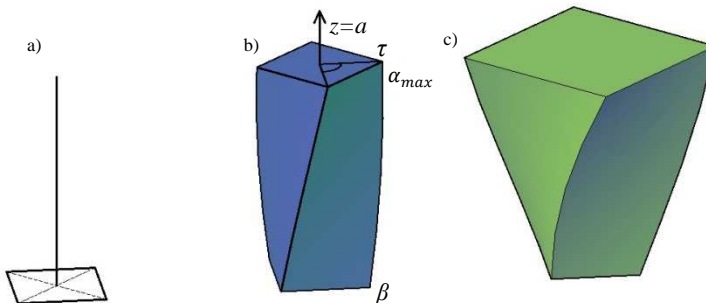
Rys.6: Realizacja realnego elementu architektonicznego - słupa kręconego a) ścieżka i przekrój; b) powierzchnia słupa kręconego (SWEEP z prostoliniową ścieżką i obrotem względem punktu nie będącego środkiem okręgu)



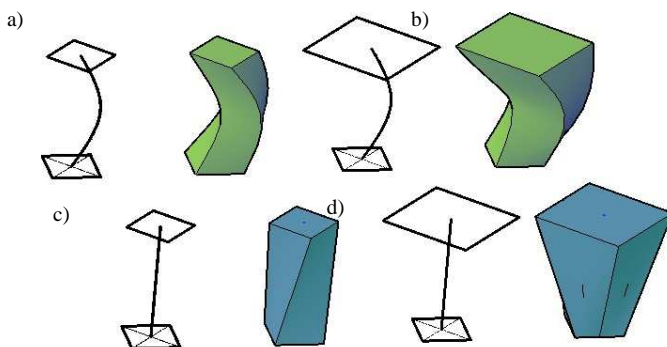
Rys. 7: Realizacja powierzchni Saint-Gilles: a) ścieżka i przekroje; b) powierzchnia Saint-Gilles (LOFT)

Innym sposobem otrzymania tych powierzchni jest użycie funkcji LOFT (wyciąganie złożone). Ale jest to rozwiązanie przybliżone, aczkolwiek często w pełni zadowalające (Rys.7).

Przekształcenia skręcające. Stworzonego obiektu nie jesteśmy w stanie przekręcić, giąć itd. Już w fazie konstruowania musimy znać parametry, które pozwolą uzyskać końcowy rezultat. Mamy do wyboru kilka funkcji. Są to komendy: SWEEP, LOFT (rys. 8,9).

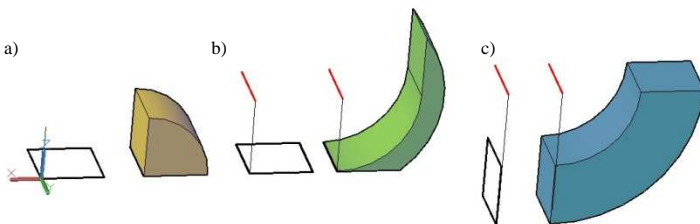


Rys.8: Ilustracja przekształcenia skręcającego: a) ścieżka i przekrój; b) końcowa bryła; c) końcowa bryła z przeskalowaną górną podstawą (skala 2:1) (SWEEP)



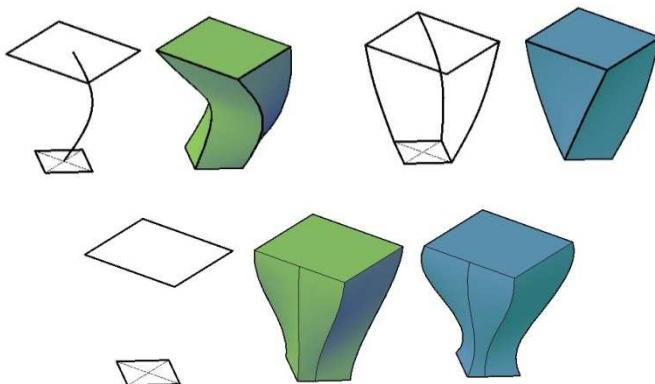
Rys. 9: Realizacja przekształceń skręcających i zwężających: a) ścieżka krzywoliniowa, dwa przekroje, i otrzymana z nich bryła; b) ścieżka krzywoliniowa, dwa przekroje z skalowaniem, i otrzymana z nich bryła; c) ścieżka pionowa, dwa przekroje, i otrzymana z nich bryła; d) ścieżka pionowa, dwa przekroje z skalowaniem, i otrzymana z nich bryła (LOFT)

Przekształcenia zginające. Przekształcenia zginające są najprostsze do otrzymania, odpowiada za nie funkcja REVOLVE. Wybraną bryłę otrzymujemy poprzez określenie przekroju oraz osi lub ścieżki przez którą chcemy obrócić nasz przekrój (rys. 10).

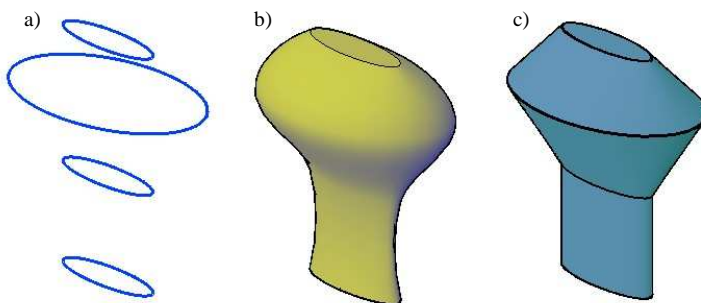


Rys. 10: Realizacja przekształceń zginających: a) obrót przekroju wzdłuż osi Oy ; b) obrót przez ścieżkę, przekrój równoległy do płaszczyzny Oxy ; c) obrót przez tę samą ścieżkę jak w przypadku b, ale przekrój równoległy do płaszczyzny Oyz (REVOLVE)

Przekształcenia zwężające. Przekształcenia zwężające możemy zrealizować na wiele sposobów za pomocą poleceń EXTRUDE, SWEEP, LOFT (rys. 11, 12).



Rys. 11: Realizacja przekształceń zwężających (EXTRUDE, SWEEP, LOFT)



Rys. 12: Realizacja przekształceń zwężających: a) przekroje poprzeczne; b) połączenie powierzchnią gładką; c) połączenie powierzchnią prostokreślną (EXTRUDE, SWEEP, LOFT)

References:

- [1] Otto F., Otto E.: *Podręcznik geometrii wykreślnej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.
- [2] Pottmann H., Asperl A., Hofer M. and Kilian A. (2007). *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press. ISBN 978-1-934493-04-5.
- [3] http://www.ask.com/pictures?qsrc=167&o=101699&l=dis&q=turning%20torso&locale=en_US