

Krzysztof M. UŁAMEK

Politechnika Łódzka

Katedra Geodezji, Kartografii Środowiska i Geometrii Wykreślnej

Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź

tel. 0048 42 6313511, ulamek@p.lodz.pl

KONSTRUOWANIE ODBIĆ WIELOKROTYCH OD POWIERZCHNI WEWNĘTRZNYCH SFERY I WALCA OBROTOWEGO

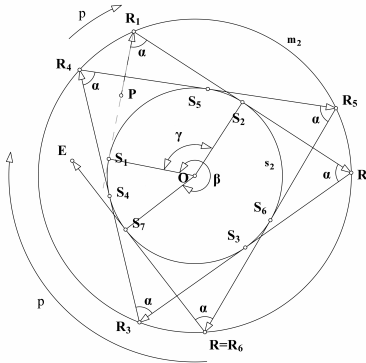
Opracowanie obejmuje analizę geometryczną zjawiska odbicia zwierciadlanego od powierzchni wewnętrznej sfery i walca obrotowego. Istotą tej analizy jest wskazanie konstrukcji umożliwiającej odwzorowanie odbicia dowolnego punktu P z przestrzeni rzutowej S^3 w zwierciadle utworzonym na powierzchni wewnętrznej sfery λ_2 lub walca γ_2 . W tym celu należy znaleźć taki punkt R należący do wybranej powierzchni, aby promień wychodzący z punktu P po odbiciu w zwierciadle w R przebiegł przez środek rzutowania E (oko). Problem ten był już przedmiotem badań na gruncie geometrii wykreślnej w zakresie odbić bezpośrednich, tj. takich, gdy promień biegnący od punktu P do E odbija się tylko w punkcie R . Natomiast autorowi nie są znane prace, które obejmowałyby swoim zakresem zjawisko odbić wielokrotnych, gdy promień biegnący z punktu P do punktu E może odbić się dodatkowo (także wielokrotnie) w zwierciadle wklęsłym zanim się odbije w punkcie R .

Rozważmy sytuację ogólną, kiedy punkty P , E i R nie są tożsame i nie są współliniowe. Dodatkowo przyjmijmy dla sfery, że punkty P i E nie są tożsame z punktem O (środkiem sfery), a dla walca, że punkty P i E nie należą do osi walca obrotowego.

Własności zjawiska odbicia wielokrotnego w sferze można zapisać następująco (rys.1):

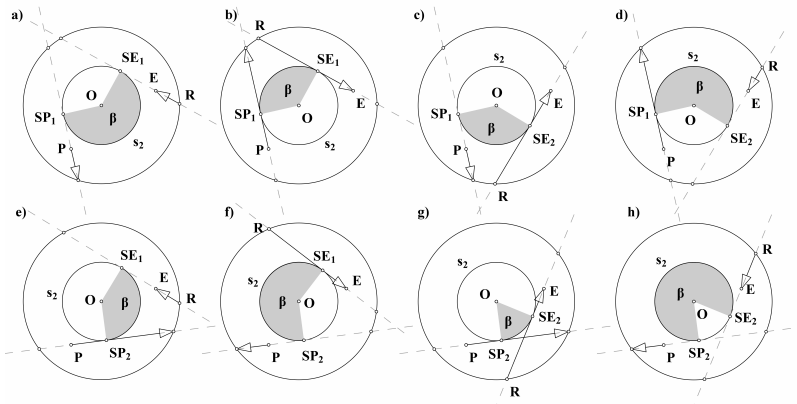
1. Punkty E , P , R , O oraz pośrednie punkty odbicia R_1 , R_2 , ..., R_n należą do jednej płaszczyzny π , czego konsekwencją jest to, że w dla sfery rozważane zagadnienie jest równoważne zagadnieniu poszukiwania punktów odbicia na okręgu m_2 , który jest częścią wspólną sfery λ_2 i płaszczyzny π .
2. Wszystkie odcinki linii łamanej opisującej drogę promienia od punktu P do oka E są styczne do właściwego dla niej okręgu s_2 o środku w punkcie O .
3. Kąty α pomiędzy kolejnymi odcinkami łamanej są przystające.
4. Zgodnie z ideą momentu obrotowego można przyjąć, że jeżeli odcinki łamanej przekształcimy na wektory (przyjmijmy, że zwrot będzie skierowany odpowiednio od punktu P w kierunku E), to wszystkie te wektory (w tym pierwszy i ostatni) tworzą momenty obrotowe względem punktu O o zwrocie zgodnym z ruchem wskazówek zegara lub wszystkie mają ten zwrot przeciwny.
5. Kąty utworzone przez kolejne punkty styczności odcinków łamanej i środek okręgu $\angle S_1OS_2$, $\angle S_2OS_3$, ..., $\angle S_{n-1}OS_n$ są przystające. Jeżeli suma kątów od $\angle S_1OS_2$ do $\angle S_{n-1}OS_n$ równa n -

1 razy $\angle S_1OS_2$ ma wartość δ , to kąt β utworzony przez pierwszy punkt styczności S_1 , środek okręgu O i ostatni punkt styczności S_n jest równy wartości δ lub δ pomniejszonej o wielokrotność kąta pełnego, tak aby miara łukowa kąta β zawierała się w przedziale $(0, 2\pi)$. Kąt β mierzymy od półprostej OS_1 do półprostej OS_n w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara lub przeciwnie; zgodnie z występującą w danym przypadku własnością 4.



Rys. 1

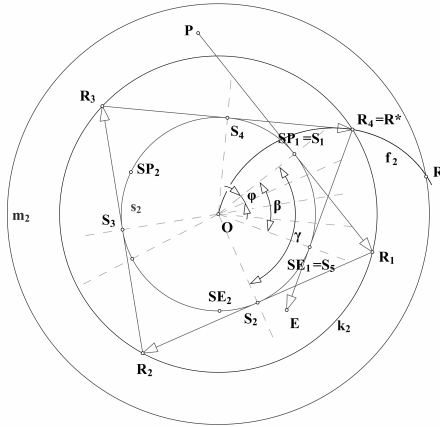
Na podstawie poznanych własności zjawiska odbicia wielokrotnego od okręgu można sformułować zbiór możliwych przypadków tego zagadnienia (rys.2). I tak, punkt P może przynależeć do dwóch stycznych do okręgu s_2 (2 przypadki), punkt E może również przynależeć do dwóch stycznych do okręgu s_2 (2×2 przypadki), wektory wychodzące z P mogą tworzyć momenty obrotowe "lewoskrętne" lub "prawoskrętne" ($2 \times 2 \times 2$ przypadki). Zwroty wektorów kończących się w E muszą spełniać własność 4, a więc nie zmieniają liczby przypadków.



Rys.2

Ostatnim parametrem określającym ilość możliwych przypadków tego zagadnienia jest krotność odbicia. W przypadku m-krotnego odbicia dla każdej pary konstrukcji wykorzystujących te same punkty styczności, np. dla przypadków a) i b) z rys.2 istnieje m potencjalnych przypadków. Otrzymujemy zatem dla m-krotnego odbicia ogółem $2 \times 2 \times 2/2 \times m$ możliwych przypadków do dalszej analizy. Na przykład w odbiciu czterokrotnym na sferze moglibyśmy zobaczyć maksymalnie 16 punktów.

Wykorzystując opisane własności wielokrotnego odbicia zwierciadlanego od powierzchni wewnętrznej sfery można wskazać konstrukcję poszukiwania punktu odbicia na drodze aproksymacji (rys. 3). Konstrukcję tę przykładowo przeprowadzimy dla jednego z przypadków odbicia czterokrotnego ($m=4$), gdy dane są punkty **E** i **P** oraz okrąg $\mathbf{m}_2$ o środku w punkcie **O** do którego należy poszukiwany punkt **R**. Rysujemy dowolny okrąg $\mathbf{s}_2$ o środku w **O** i promieniu mniejszym lub równym krótszemu z odcinków **OE** i **OP**. Wyznaczamy styczne do tego okręgu przechodzące przez **E** i **P**. Oznaczmy punkty styczności odpowiednio jako **SE₁**, **SE₂** oraz **SP₁** i **SP₂**. Rozważmy przypadek odnoszący do punktów styczności **SE₁** i **SP₁** oraz kierunku obrotu zgodnego z ruchem wskazówek zegara. Punkty **P** i **SP₁** utworzą prostą do której należy pierwszy odcinek linii łamanej opisującej przebieg promienia, natomiast punkty **E** i **SE₁** utworzą prostą do której należy ostatni odcinek tej łamanej. Do wyznaczenia pozostałych prostych, do których będą przynależne brakujące odcinki łamanej potrzebne są styczne do okręgu w punktach **S₂**, **S₃** i **S₄**. Z własności piątej wynika, że aby je wyznaczyć musimy kąt β lub kąt β powiększony o wielokrotność kąta pełnego (2π) podzielić na 4 równe części (ogólnie na m równych części). Zgodnie z własnością czwartą otrzymany w ten sposób kąt musi być mniejszy od kąta półpełnego. Warunki te spełnia w naszym przypadku zarówno kąt φ jak i kąt γ , który jest równy φ powiększonemu o $\pi/2$. Ogólnie kąt φ w kolejnych możliwych przypadkach powiększamy o wielokrotność $2\pi/m$. Wybierzmy do dalszych rozważań taki przypadek, w którym kąty utworzone przez kolejne punkty styczności i środek okręgów **O** są równe γ . Przy tym założeniu otrzymujemy punkty **S₂**, **S₃** i **S₄**, w których wyznaczamy już styczne do $\mathbf{s}_2$, zaś w punktach przecięcia następujących po sobie stycznych otrzymamy punkty **R₁**, **R₂**, **R₃**, **R₄**. Wszystkie te punkty należą do okręgu $\mathbf{k}_2$ o środku w **O**. Gdyby punktem szukanym był punkt odbicia czterokrotnego na okręgu $\mathbf{k}_2$, to jednym z rozwiązań zagadnienia byłby punkt **R***. Do wskazania szukanego punktu na okręgu $\mathbf{m}_2$ należy opisaną wyżej konstrukcję powtórzyć dla wielu okręgów $\mathbf{s}_2$ o różnych promieniach. Kolejne położenia punktu **R*** utworzą krzywą $\mathbf{f}_2$, której punkt wspólny z okręgiem $\mathbf{m}_2$ jest szukanym punktem **R** w rozważanym przypadku.



Rys.3

W przypadku odbicia od wewnętrznej powierzchni walca kolejne punkty pośrednie odbicia lustrzanego należałyby do linii śrubowej, przy czym na rzutni prostopadłej do osi walca istnieje możliwość skorzystania z konstrukcji omówionej dla okręgu (rys. 3). Wówczas punkty $R_1, R_2, \dots, R_n$, będą obrazami tworzących walca obrotowego na których następuje odbicie lustrzane i do ukazania końcowego punktu odbicia należy dokonać rozwinięcia fragmentów płaszczyzn równoległych do osi walca opisanych na tym rzucie odcinkami $R_1R_2, R_2R_3, \dots, R_{n-1}R_n$. Na tym rozwinięciu otrzymamy punkty kolejnych odbić jako przecięcia prostej łączącej P z E z tworzącymi walca.