

Stanisław OCHÓŃSKI
os. Mistrzejowice Nowe 6/5
31-640 Kraków

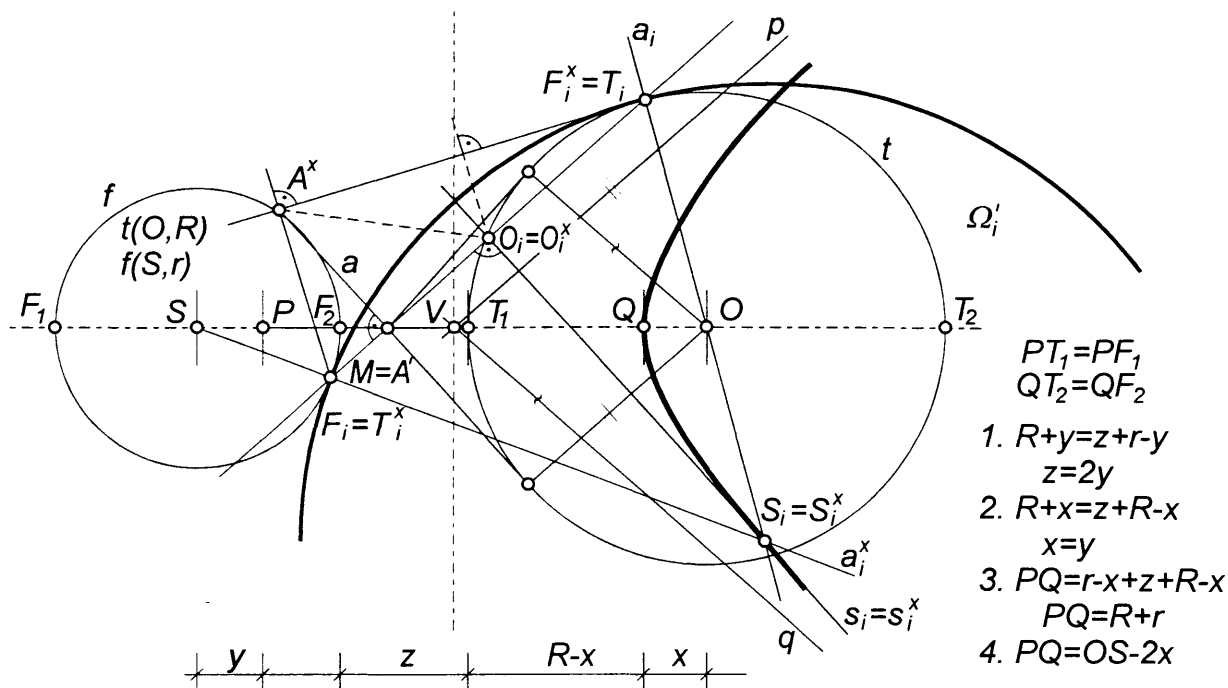
STOŻKOWE JAKO ZBIORY ŚRODKÓW SFER PRZECHODZĄCYCH PRZEZ DWA PUNKTY I STYCZNYCH DO PROSTEJ, PŁASZCZYZNY BĄDŹ SFERY - CZĘŚĆ II

3.3.2. Odcinek AB leży na zewnątrz sfery A

Gdy odcinek AB znajduje się na zewnątrz sfery i nie jest do niej styczny, to w płaszczyźnie rysunku punkt M jest zewnętrznym punktem okręgu $t(O, R)$. Środki sfer stycznych do okręgu t w jego punktach T_i leżą na prostych a_i łączących punkty styczności ze środkiem O okręgu t . Natomiast m.g. punktów równoodległych od wierzchołków ΔABT_i są proste s_i przechodzące przez środki O_i okręgów opisanych na tych trójkątach i prostopadłych do ich płaszczyzn. Z tych samych co w p.3.3.1. powodów proste a_i i s_i zawarte są w płaszczyźnie rysunku. Tak więc środki S_i sfer Ω_i zawierających punkty A i B i równocześnie stycznych do okręgu t są punktami przecięcia się tych prostych ($S_i = a_i \cap s_i$).

Analogicznie jak w p.3.3.1 zbiorem punktów F_i symetrycznych do punktów T_i względem środków O_i okręgów opisanych na ΔABT_i jest okrąg f będący antyinersejnym obrazem okręgu t względem okręgu $k(M, a)$. Środek S i promień r okręgu f wyznaczamy analogicznie jak w p.3.3.1. Traktując te okręgi zamiennie, punktom $T_i^x = F_i$ będą przyporządkowane w tym przekształceniu punkty $F_i^x = T_i$. Z tych samych powodów co w p.3.3.1 punkty $O_i^x = O_i$, proste $s_i^x = s_i$, natomiast proste a_i^x jako zbiory środków sfer stycznych do okręgu f w punktach $T_i^x = F_i$ są prostymi łączącymi te punkty ze środkiem S okręgu f . Punkty S_i^x przecięcia prostych a_i^x i $s_i^x = s_i$ jednoczą się z punktami S_i . Wynika stąd, że odległość punktów S_i od obydwu okręgów t i f są takie same ($S_i T_i = S_i F_i$). Punkty P i Q należą do zbioru środków S_i , ponieważ są punktami prostej OS równoodległymi od okręgów t i f ($PT_1 = PF_1$ i $QT_2 = QF_2$). Z równości tych odcinków i wzajemnego położenia wymijających się okręgów $t(O, R)$ i $f(S, r)$ wynika równość odcinków SP i OQ , długość odcinka $PQ = R + r$, a także że $PQ < OS$ (rys.7). Spozstrzegamy ponadto, że odcinki SS_i są równe sumie odcinków $S_i F_i$ i $SF_i = r$, a odcinki $S_i T_i = S_i F_i$ są sumami odcinków OS_i i $OT_i = R$. Z tych dwóch równości otrzymujemy relację postaci $SS_i - OS_i = R + r$. Trójkąty $\Delta S_i T_i F_i$ są równoramienne, w których symetralne s_i boków $T_i F_i$ są dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach S_i . Spozstrzeżone zależności w zbiorze środków S_i są charakterystycznymi właściwościami hiperboli. Tak więc udowodniono twierdzenie orzekające, że zbiorem środków S_i sfer Ω_i zawierających punkty A i B i zarazem stycznych do sfery A przy tych założeniach jest hiperbola o osi rzeczywistej $PQ = R + r$, dla której punkty O i S są ogniskami (stałymi), a proste s_i dwusieczne $\angle OS_i S$ jej stycznymi w punktach S_i .

Należy zauważyć jeszcze, że promienie m_i pęku prostych $M(m_i)$ przecinają okrąg t po raz drugi w punktach T_i^* bądź są do niego styczne w punktach $T_i = T_i^*$ ($i=1,2$). W przypadku pierwszym środki S_i^* sfer Ω_i^* spełniających warunki brzegowe są punktami przecięcia prostych $a_i^* = OT_i^*$ z prostymi s_i przechodzącymi przez środki O_i^* okręgów opisanych na ΔABT_i^* i prostopadłych do ich płaszczyzn. Z prostopadłości prostych s_i i s_i^* do tych samych płaszczyzn τ_i zawierających ΔABT_i i ΔABT_i^* wynika ich równoległość. Z kolei z



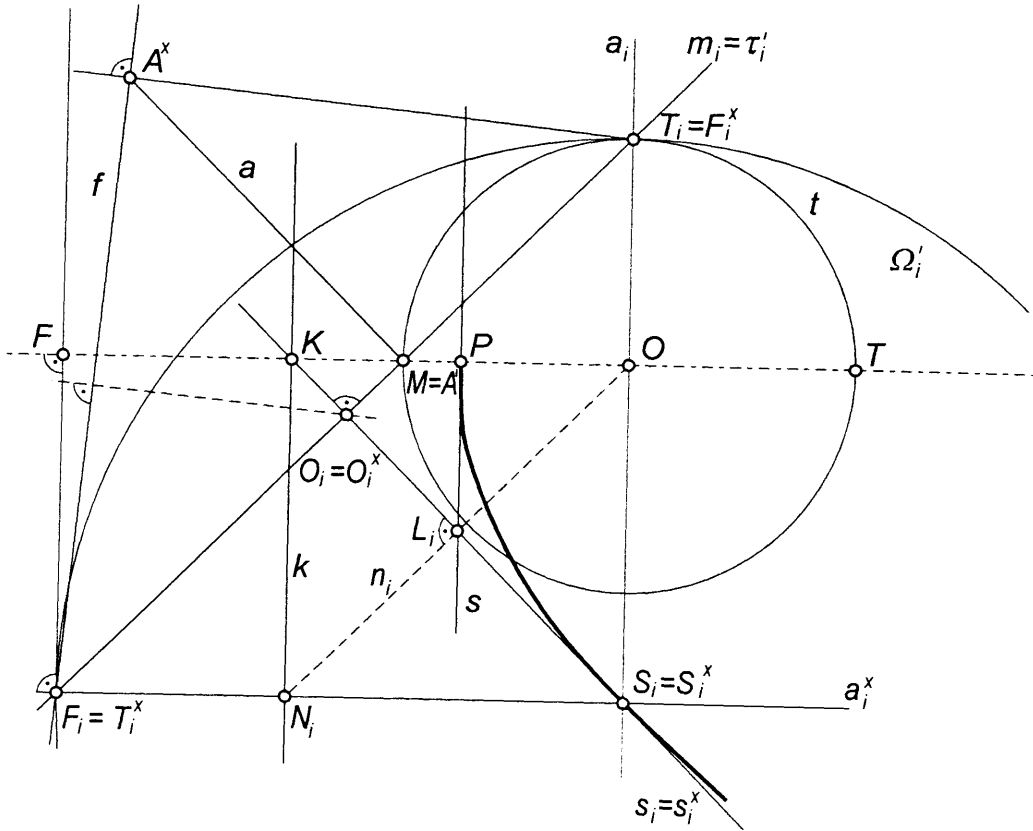
Rys. 7

równoległości stycznych do stożkowej wynika, że odcinki ograniczone punktami styczności tych stycznych są jej średnicami. Średnice hiperboli $S_i S_i^*$ przecinają jej oś rzeczywistą PQ w punkcie V , który jest jej środkiem.

W przypadku drugim w pęku prostych $M(m_i)$ przy tych założeniach istnieją tylko dwa takie promienie m_i ($i=1,2$), które są styczne do okręgu t w punktach $T_i = T_i^*$ ($i=1,2$). Środki S_i ($i=1,2$) sfer Ω_i ($i=1,2$) spełniających nałożone warunki, podobnie jak poprzednio winny się znaleźć w punktach przecięcia prostych a_i ($i=1,2$) i s_i ($i=1,2$). Z przynależności promieni m_i ($i=1,2$) stycznych do okręgu t oraz ΔABT_i ($i=1,2$) do tej samej płaszczyzny τ_i ($i=1,2$) i prostokątności prostych a_i ($i=1,2$) i s_i ($i=1,2$) do niej wynika ich równoległość ($a_i \parallel s_i$). Tak więc środki S_i ($i=1,2$) szukanych sfer Ω_i są w tym przypadku nieokreślone, a sfery te degenerują się do płaszczyzn τ_i ($i=1,2$) przechodzących przez punkty A i B i stycznych do sfery A . Proste a_i/s_i ($i=1,2$) prostopadłe do tych płaszczyzn wyznaczają kierunki asymptotyczne hiperboli (rys.7).

3.3.3. Odcinek AB jest styczny do sfery A

Jeżeli odcinek AB równoległy do płaszczyzny potęgowej α jest styczny do sfery A , to w płaszczyźnie rysunku punkt M jest punktem okręgu $t(O,R)$. Promienie m_i pęku prostych $M(m_i)$ przecinają okrąg t po raz drugi w punktach T_i (rys.8). Środki S_i sfer Ω_i zawierających punkty A i B i zarazem stycznych do sfery A analogicznie jak w p.3.3.2. są punktami przecięcia prostych $a_i = OT_i$ z prostymi s_i przechodzącymi przez środki O_i okręgów opisanych na ΔABT_i i prostopadłych do ich płaszczyzn. Punkty F_i symetryczne do punktów T_i względem środków O_i tych okręgów są obrazami antyinwersyjnymi punktów T_i rozważanego okręgu t zawierającego punkt M , względem okręgu $k(M, a)$. Z właściwości antyinwersji, jak również z przeprowadzonego dowodu w p.2.2. wynika, że zbiorem punktów F_i przy tych założeniach jest prosta f prostopadła do prostej MO . Antyinwersja jest inwolucją, a zatem okręgi t i f można traktować zamiennie. Załóżmy teraz, że $F_i = T_i^x$. Analogicznie do ustaleń p.3.3.2 punkty F_i^x antyinwersyjne obrazy punktów T_i^x zjednoczą się z



Rys. 8

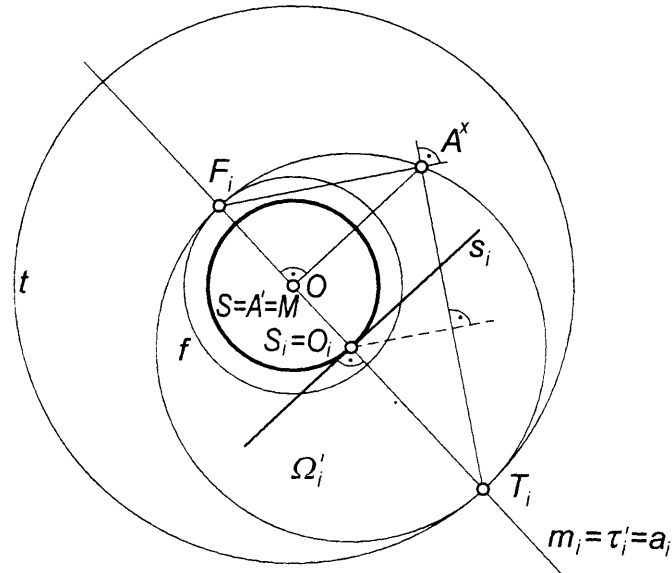
punktami T_i , środki O_i^x okręgów opisanych na ΔABT_i^x pokrywają się z punktami O_i , a proste s_i^x zjednoczą się z prostymi s_i . Natomiast środki S_i^x sfer stycznych do prostej f w punktach $T_i^x = F_i$ będą zawarte w prostych a_i^x przechodzących przez punkty styczności i prostopadłych do prostej f . Punkty S_i^x przecięcia się prostych a_i^x i $s_i^x = s_i$ zjednoczą się z punktami S_i , ponieważ odcinki $S_i T_i$ i $S_i F_i$ oraz $S_i^x T_i^x$ i $S_i^x F_i^x$ muszą być równe (punkty $T_i = F_i^x$ i $T_i^x = F_i$ leżą na tej samej sferze o środku $S_i = S_i^x$). Punkt P prostej MO z uwagi na to, że $PT = PF$ należy do zbioru punktów S_i . Trójkąty $\Delta T_i S_i F_i$ są równoramienne, a więc symetralne s_i ich boków $T_i F_i$ są dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach S_i . Poprowadzone przez środek O okręgu t proste n_i prostopadłe do prostych s_i przecinają je w punktach L_i a proste a_i^x w punktach N_i . Trójkąty $\Delta N_i S_i O$ są trójkątami równoramionymi, a więc $S_i N_i = O S_i$ dla każdego punktu S_i tego zbioru. Ponadto równość odcinków OL_i i $L_i N_i$ implikuje przynależność punktów N_i do prostej k równoległej do prostej f i przechodzącej przez punkt K symetryczny do punktu O względem punktu P . Podobnie zbiorem punktów L_i jest prosta $s // f$ i przechodząca przez punkt P .

Na podstawie wykazanych właściwości tego zbioru, stwierdzamy, że środki S_i sfer Ω_i przechodzących przez punkty A i B i równocześnie stycznych do sfery A przy tych założeniach leżą na paraboli o osi MO i wierzchołku P , dla której środek O okręgu t jest ogniskiem (stałym), a prosta k jej kierownicą (rys.8).

3.3.4. Odcinek AB zawiera środek sfery A

Jeżeli odcinek AB równoległy do płaszczyzny potęgowej α zawiera jej środek będący równocześnie środkiem tego odcinka, to na płaszczyźnie rysunku punkt M zjednoczy się ze środkiem O okręgu $t(O,R)$. Dla każdego punktu T_i tego okręgu środki S_i sfer Ω_i zawierających punkty A i B i zarazem stycznych do sfery A są punktami przecięcia prostych $a_i = OT_i$ z prostymi s_i przechodzącymi przez środki O_i okręgów opisanych na ΔABT_i i

prostopadłymi do ich płaszczyzn τ_i . Punkty F_i będące antyinwersyjnymi obrazami punktów T_i okręgu t , względem okręgu $k(M, a)$, z uwagi na symetrię środkową leżą na współśrodkowym z tym okręgiem, okręgu f antyinwersyjnym obrazie okręgu t . Promień okręgu f równy jest długości odcinka $OF_i = r$. Punkty S_i przecięcia się prostych a_i i s_i jednoczą się ze środkami O_i okręgów opisanych na ΔABT_i , ponieważ proste a_i jednoczą się rzutami płaszczyzn tych trójkątów. Tak więc zbiorem środków S_i sfer Ω_i przechodzących przez punkty A i B i równocześnie stycznych do okręgu t (a tym samym do sfery A) jest w tym przypadku współśrodkowy z okręgami t i f , okrag, którego promień równy jest długości odcinka $OS_i = R - r_i$, gdzie r_i jest promieniem okręgu opisanego na ΔABT_i (rys.9).



Rys. 9

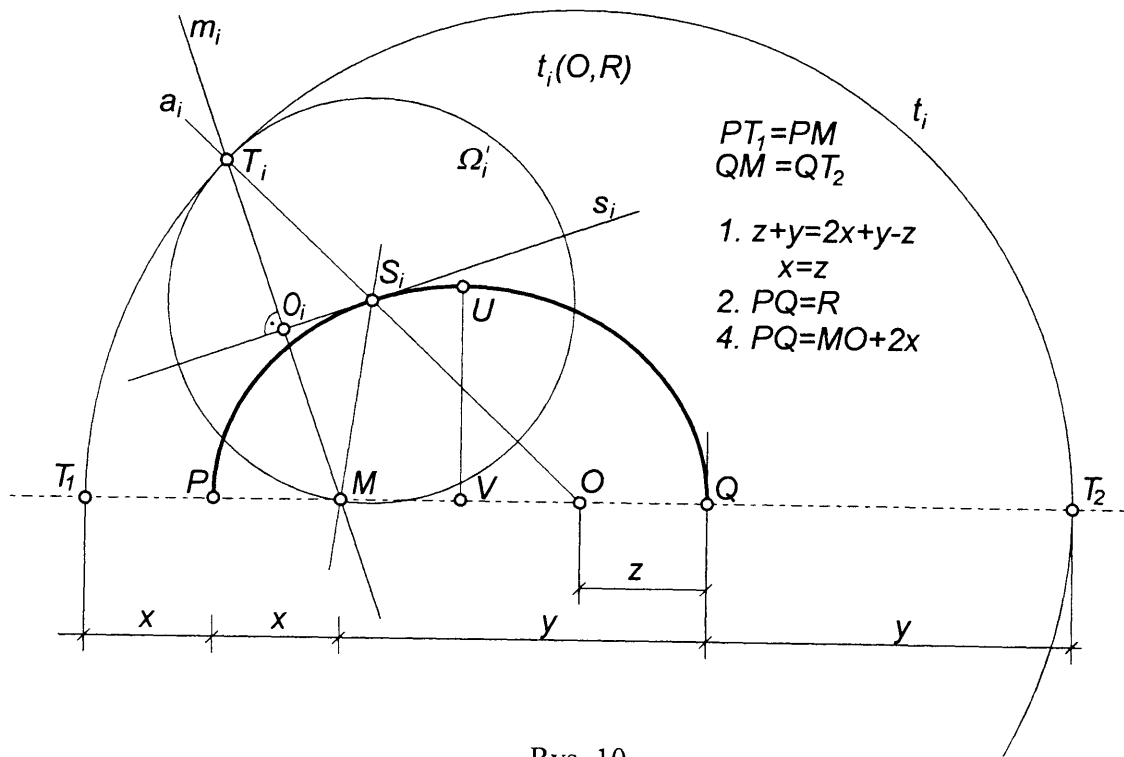
Z rozważań punktu 3.3 wynika, że na płaszczyźnie antyinwersyjnej niezdegenerowane krzywe stopnia drugiego są punktami równoodległymi od dwóch stałych i wzajemnie wymijających się okręgów, z których tylko jeden może przyjąć postać prostej. Z uwagi na involucję jeden z nich można traktować jako m.g. punktów styczności określonych sfer z płaszczyzną/sferą, zaś drugi (zamiennie) jako zbiór "ruchomych" ognisk będących antyinwersyjnymi obrazami punktów styczności w przekształceniu antyinwersyjnym określonym za pomocą tych okręgów.

3.4. Punkty A i B jednoczą się

W przypadku jednoczenia się punktów dyskutowane będą zbiory środków S_i takich sfer Ω_i , które przechodzą przez jeden punkt i są zarazem styczne do danej sfery A . Przy tych założeniach w każdej płaszczyźnie μ_i pęku (wiązki) płaszczyzn o osi (wierzchołku) łączącej punkt M ze środkiem O sfery A ($M=O$), m.g. punktów styczności szukanych sfer z daną sferą jest okrag t_i , w którym płaszczyzna μ_i przecina daną sferę. W zależności od położenia punktu $M=A=B$ względem sfery $A(O, R)$, a tym samym względem okręgu $t_i(O, R)$ środki S_i rozważanych sfer będą różnymi zbiorami.

3.4.1. Punkt M leży wewnątrz sfery A i jest punktem różnym od jej środka

Jeżeli punkt M jest wewnętrznym punktem sfery A nie jednoczącym się z jej środkiem, to na płaszczyźnie rysunku utożsamianej z każdą płaszczyzną μ_i pęku (wiązki) płaszczyzn, punkt M jest również wewnętrznym punktem okręgu t_i różnym od jego środka

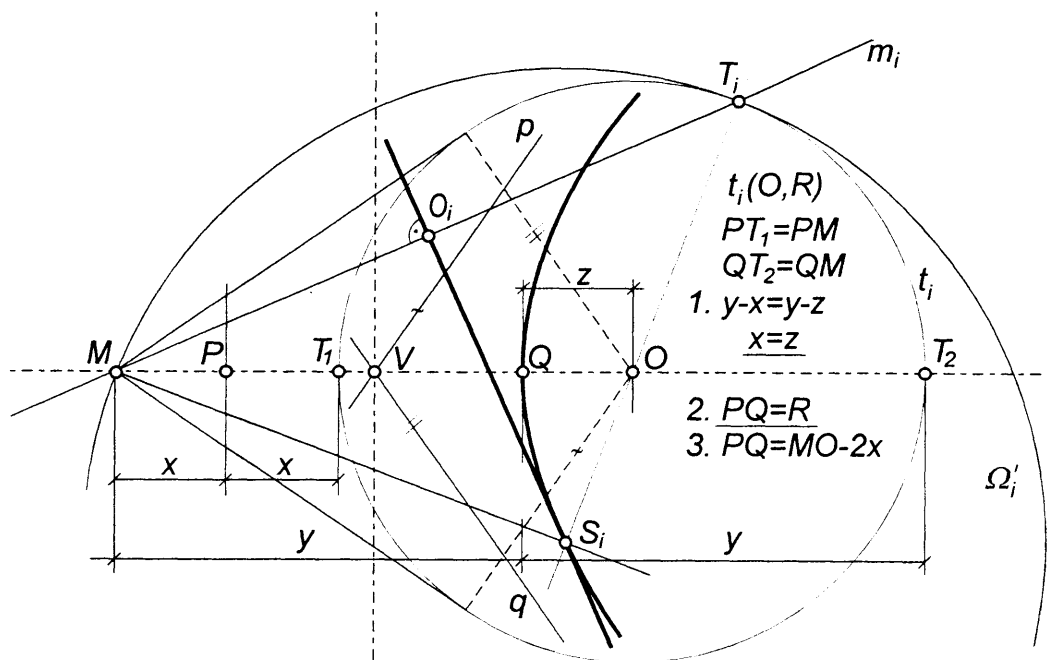


Rys. 10

(rys.10). Dla każdego punktu T_i okręgu t_i środki S_i sfer Ω_i zawierających punkt M i stycznych do okręgu t_i w punktach T_i są punktami, w których symetralne s_i odcinków MT_i przecinają proste a_i łączące punkty styczności ze środkiem O okręgu t_i . W trójkątach równoramiennych $\Delta T_i S_i M$, boki $S_i T_i$ i $S_i M$ są równe, a symetralne s_i boków MT_i są dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach S_i . Punkty P i Q prostej MO takie, że $PM = PT_i$ i $QM = QT_2$ należą do zbioru środków S_i . Z równości tych odcinków oraz położenia punktu M względem okręgu $t_i(O, R)$ wnosimy o równości odcinków MP i OQ , długości odcinka $PQ = R$ oraz, że $PQ > MO$. Zauważamy ponadto, że odcinki $OT_i = R$ są sumami odcinków $S_i O_i$ i $S_i T_i = S_i M$. A zatem $MS_i + OS_i = R$. Wykazane zależności w zbiorze punktów S_i są charakterystycznymi właściwościami elipsy. Tak więc na każdej płaszczyźnie μ_i pęku płaszczyzn o osi $l = MO$ zbiorem środków S_i sfer Ω_i przechodzących przez punkt M i stycznych do sfer A jest elipsa o długości osi dużej $PQ = R$, dla której punkty M i O są ogniskami, a proste s_i dwusieczne kątów przyległych do kątów $\angle OS_i M$ jej stycznymi w punktach S_i . Promienie pęku prostych $M(m_i)$ zawierające punkty T_i okręgu t_i przecinają go jeszcze po raz drugi w punktach T_i^* . Symetralne s_i^* odcinków MT_i^* przecinają proste $a_i^* = OT_i^*$ w punktach S_i^* , które są również środkami sfer spełniających określone warunki. Z przynależności odcinków MT_i i MT_i^* do tych samych promieni m_i pęku prostych wynika równoległość symetralnych s_i i s_i^* . Odcinki $S_i S_i^*$ ograniczone punktami styczności, stycznych równoległych są średnicami elipsy przecinającymi jej oś dużą w punkcie V - środku tej stożkowej. Te przystające elipsy o wspólnej osi generują w przestrzeni obrotową elipsoidę wydłużoną, której powierzchnia jest zbiorem środków sfer przechodzących przez punkt M i stycznych do danej sfery A (rys.10).

3.4.2. Punkt M jest zewnętrznym punktem sfery A

Gdy punkt M leży na zewnątrz sfery A , to na płaszczyźnie rysunku punkt ten jest również zewnętrznym punktem okręgu t_i (rys.11). Dla dowolnego punktu T_i tego okręgu, konstrukcja środków S_i sfer Ω_i spełniających nałożone warunki, sprowadza się do znale



Rys. 11

zenia punktów, w których symetralne s_i odcinków MT_i przecinają proste $a_i = OT_i$. W równoramiennych trójkątach ΔMS_iT_i boki S_iM_i i S_iT_i są równe, a symetralne s_i boków MT_i połowią kąty przy wierzchołkach S_i . Punkty P i Q będące środkami odcinków MT_1 i MT_2 są zarazem środkami sfer stycznych w punktach T_i ($i=1,2$) do okręgu t_i . Z równości odcinków PT_1 i PM oraz QT_2 i QM i położenia punktu M względem okręgu t_i wynika równość odcinków MP i OQ , długość odcinka $PQ = R$, a także że $PQ < MO$ (rys.11). W trójkątach równoramiennych ΔMS_iT_i nie trudno zauważyć, że $S_iM = S_iT_i$, a $S_iT_i = S_iO + (OT_i = R)$. Z tych dwóch równości otrzymujemy równość trzecią postaci $S_iM - S_iO = R$. Wykazane zależności zbioru punktów S_i są charakterystycznymi właściwościami hiperboli. A zatem udowodniono, że w każdej płaszczyźnie μ_i pęku płaszczyzn o osi $l = MO$ zbiorem środków S_i sfer Ω_i przechodzących przez punkt M i stycznych do okręgów t_i jest hiperbola o osi rzeczywistej $PQ = R$, dla której punkty M i O są ogniskami, a proste s_i jej stycznymi w punktach S_i .

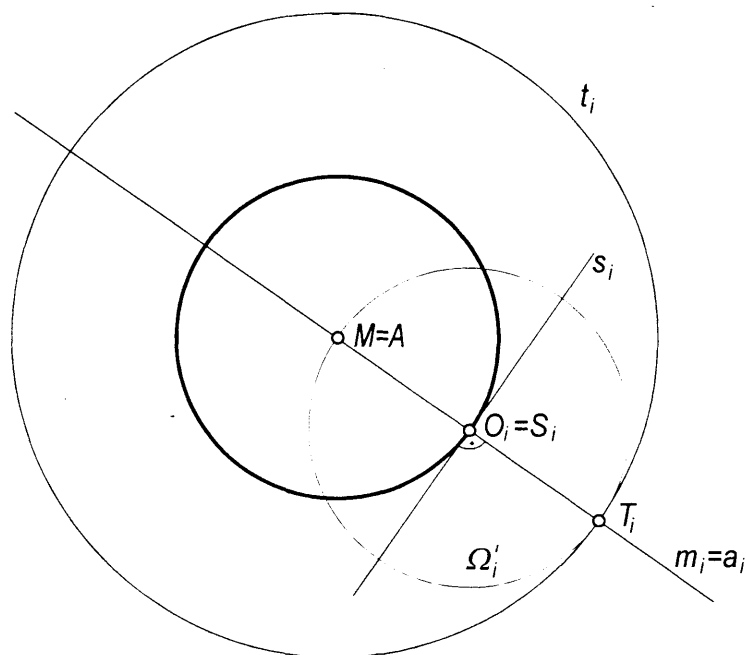
Warto jeszcze zauważyć, że promienie m_i pęku prostych $M(m_i)$ przecinają okrąg t_i po raz drugi w punktach T_i^* bądź są do niego styczne w punktach $T_i = T_i^*$ ($i=1,2$). Jeżeli $T_i \neq T_i^*$, to symetralne s_i^* odcinków MT_i^* przecinają proste $a_i^* = OT_i^*$ w punktach S_i^* , które są również środkami sfer spełniających nałożone warunki. A ponieważ odcinki MT_i i MT_i^* zawarte są w tych samych promieniach m_i pęku prostych $M(m_i)$, to ich symetralne s_i i s_i^* są równoległe. Odcinki $S_iS_i^*$ ograniczone punktami styczności tych stycznych ($s_i \parallel s_i^*$) są średnicami hiperboli przecinającymi jej oś rzeczywistą w punkcie V będącym jej środkiem.

Gdy $T_i = T_i^*$ wówczas w pęku prostych $M(m_i)$ istnieją dwa promienie m_i ($i=1,2$) styczne w tych punktach do okręgu t_i (rys.11). Symetralne s_i^* ($i=1,2$) odcinków MT_i^* ($i=1,2$) są w tym przypadku równoległe do prostych $a_i^* = OT_i^*$ zawierających promienie styczności korespondujące ze stycznymi m_i ($i=1,2$). A zatem środki S_i^* ($i=1,2$) szukanych sfer są nieokreślone, gdyż sfery te degenerują się do płaszczyzn τ_i ($i=1,2$) przechodzących przez punkty M i stycznych do sfery A .

Proste a_i^*/s_i^* ($i=1,2$) określają kierunki asymptotyczne hiperboli. Te przystające hiperbole zawarte w płaszczyznach μ_i pęku płaszczyzn $l(\mu_i)$ tworzą w przestrzeni obrotową dwupowłokową hiperboloidę o osi l , która jest zbiorem środków sfer przechodzących przez punkt i stycznych do danej sfery.

3.4.3. Punkt M jednoczy się ze środkiem sfery A

Przy tych założeniach, na płaszczyźnie rysunku punkt M jednoczy się ze środkiem O okręgu t_i . W każdej płaszczyźnie μ_i wiązki płaszczyzn o wierzchołku $M = O$, środki S_i sfer Ω_i przechodzących przez punkt M i stycznych do okręgu t_i są punktami, w których symetralne s_i odcinków MT_i przecinają proste a_i łączące punkty styczności ze środkiem O okręgu t_i . Środki tych sfer jednoczą się ze środkami odcinków MT_i , a ich zbiorem jest okrąg współśrodkowy z okręgiem t_i , którego promień jest połową promienia okręgu t_i . Te przystające okręgi o wspólnym środku, zawarte w płaszczyznach wiązki płaszczyzn generują sferę, która w przestrzeni jest zbiorem środków sfer przechodzących przez środek danej sfery i stycznych do niej (rys.12).



Rys. 12

3.4.4. Punkt M jest punktem sfery A

Jeżeli punkt M jest punktem sfery $A(O, R)$, to zbiorem środków S_i sfer Ω_i stycznych w tym punkcie do sfery A jest prosta l łącząca punkt styczności z jej środkiem ($l = MO$).

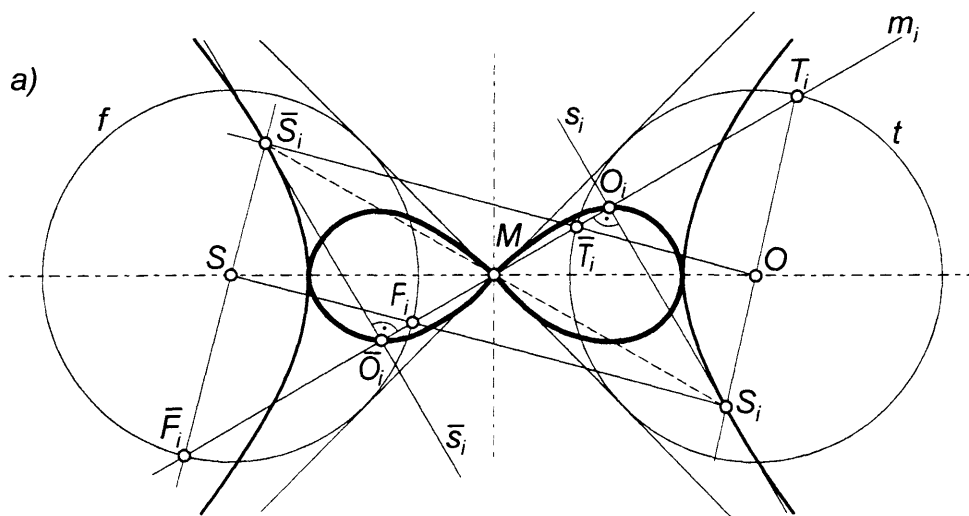
Reasumując wyniki rozważań p.3 niniejszej pracy, stwierdzamy, iż zbiorami środków sfer przechodzących przez dwa różne bądź jednoczące się punkty i zarazem stycznych do danej sfery mogą być punkt, prosta, okrąg, elipsa, parabola, hiperbola, sfera, elipsoida obrotowa wydłużona i hiperboloida obrotowa dwupowłokowa, a miejscem geometrycznym ich punktów styczności z daną sferą punkt, mały i wielki okrąg oraz sfera.

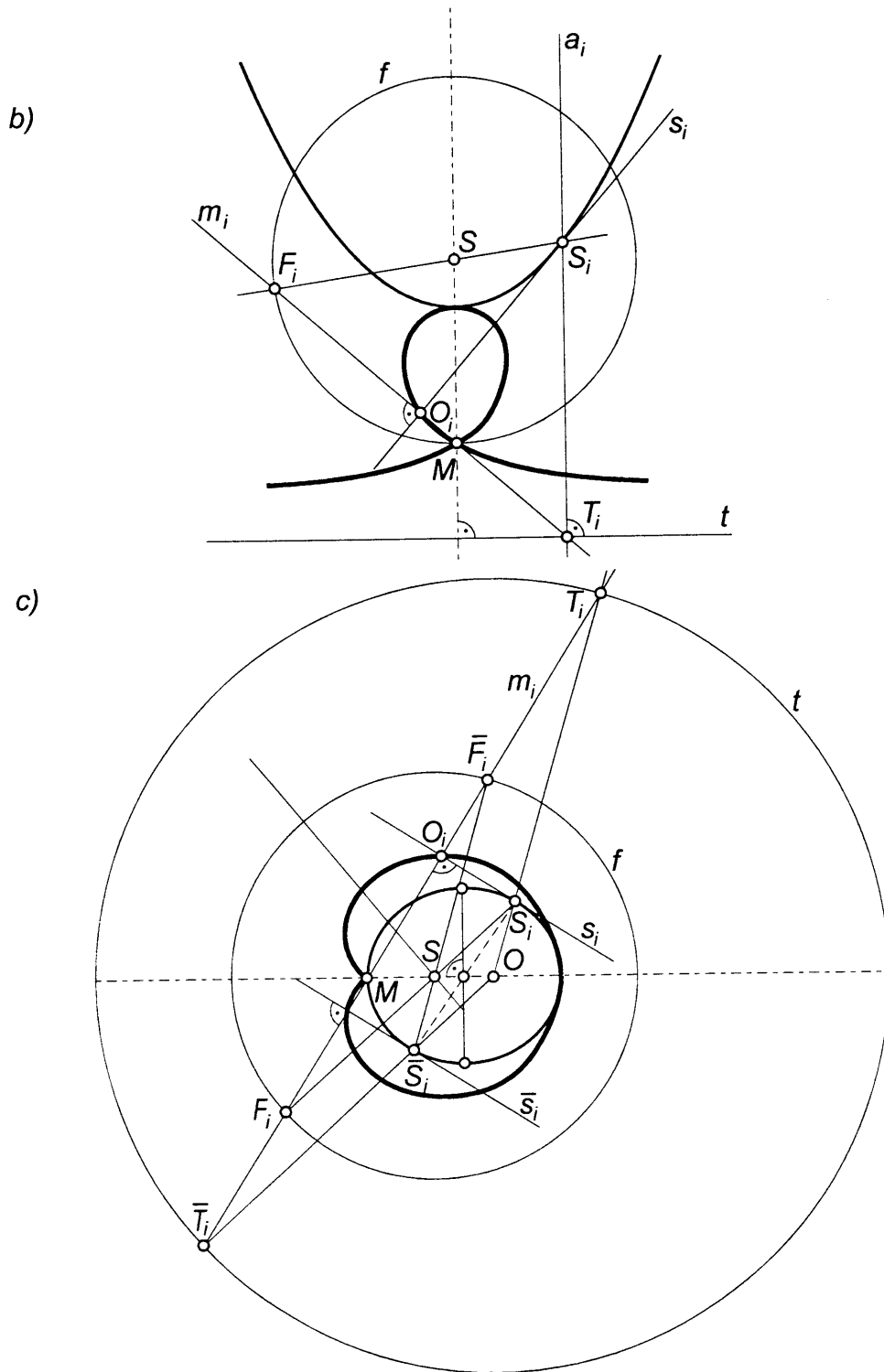
Z udowodnionych właściwości niezdegenerowanych stożkowych w p.3.4. wnosimy, że stożkowe te podobnie jak parabola mogą być zdefiniowane na płaszczyźnie euklidesowej jako zbiór punktów równoodległych od stałego punktu i stałego okręgu/prostej. Jest to rozszerzenie znanej definicji paraboli na pozostałe krzywe stopnia drugiego. Wynika stad, że na płaszczyźnie każda niezdegenerowana stożkowa może być w sposób jednoznaczny określona za pomocą punktu i okręgu/prostej nie zawierającego tego punktu.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na bardzo interesujące spostrzeżenie wynikające z dyskusji uzyskanych wyników w p.1.4., p.2.3. i p.3.4.4. niniejszego artykułu. Zauważamy, że w omówionych tam przypadkach m.g. środków O_i odcinków MT_i są okręgi podobnie położone do okręgów t_i bądź proste równoległe do prostych t . Środkiem podobieństwa tych okręgów jest punkt M . Środki te jak łatwo zauważyć są spodkami stycznych do rozważanych stożkowych. Tak więc rozważania nad zbiorami środków sfer spełniających określone w p.1.4, p.2.3. i p.3.4 warunki doprowadziły autora do znanej w literaturze konstrukcji stożkowych za pomocą krzywych spodkowych [3]. Ta przypadkowa zbieżność uzyskanych wyników potwierdza ich prawdziwość oraz poprawność rozumowania.

Zauważamy, że w przypadkach opisanych w p.3.3 otrzymane stożkowe są również obwiedniami stycznych przechodzących w tym przypadku przez środki okręgów opisanych na ΔABT_i i prostopadłych do ich płaszczyzn.

Tak więc i w tym przypadku spodki stycznych do rozpatrywanych stożkowych zgodnie z definicją [3] tworzą krzywe spodkowe. Spodki O_i są środkami odcinków $T_i F_i$, których punkty końcowe są wzajemnymi obrazami w przekształceniu antyinerweryjnym względem okręgu $k(M, a)$. W zależności od położenia wymijających się okręgów i stosunku ich promieni, m.g. środków tych odcinków są krzywe spodkowe stożkowych określonych tymi okręgami, będące na ogół krzywymi stopnia czwartego. Na rys. 13a, b i c kolejno pokazano leminiskatę jako krzywą spodkową korespondującą z hiperbolą równoboczną, strofoidę przypisaną paraboli oraz kardiodę będącą krzywą spodkową elipsy. Badania właściwości tych krzywych, a także ich relacji z zespolonymi z nimi stożkowymi są niepełne i wymagają kontynuacji.





Rys. 13

4. Konstrukcje stożkowych

W każdym na ogół podręczniku bądź skrypcie z geometrii wykreślnej lub rysunku technicznego, a także i różnorodnych przewodnikach technicznych można znaleźć pewną ilość najrozmaitszych konstrukcji krzywych stopnia drugiego wynikających zarówno z przy-

mowanych w nich definicji, jak i sposobów ich określania. Konstrukcje te nie są w większości przypadków jednakowe dla wszystkich rodzajów stożkowych i są konstrukcjami stożkowej "miejsca" bądź "obwiedni". Z otrzymanych wyników badań nad zbiorami środków sfer spełniających określone warunki można wyprowadzić uniwersalne konstrukcje stożkowych pozwalające na wykreślanie ich stycznych wraz z punktami styczności. Zaproponowany kinematyczny i zarazem uniwersalny sposób kreślenia bieżących punktów stożkowej wraz ze stycznymi może być inspiracją do zbudowania odpowiedniego przyrządu do mechanicznego ich wykreślenia.

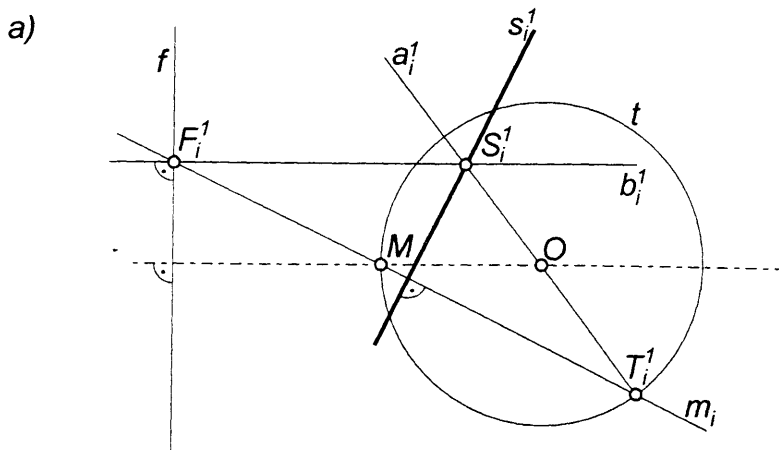
4.1. Konstrukcja stożkowej określonej dwoma wymijającymi się okręgami

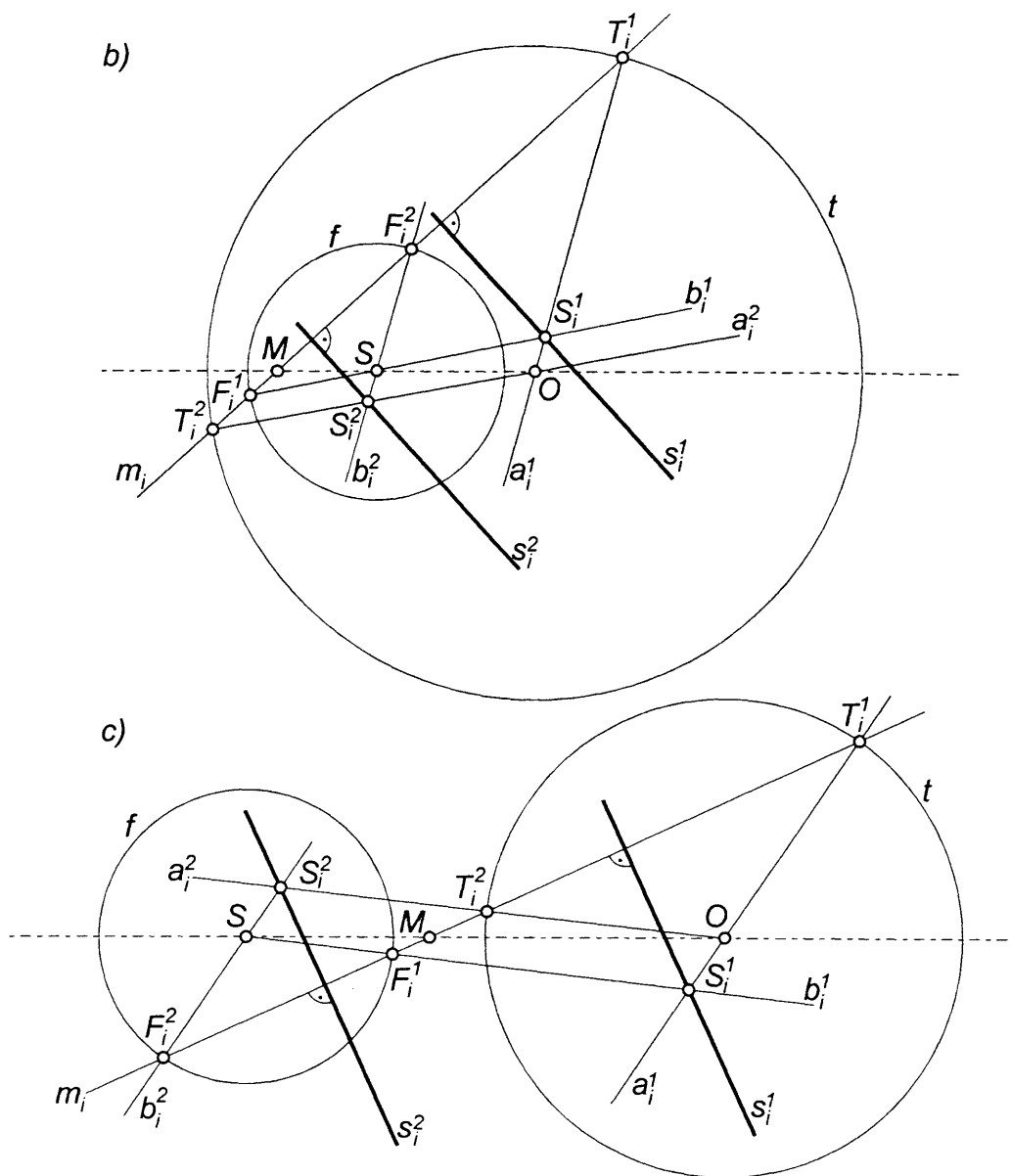
Z rozważań p.3.3. wynika, że dwa współpłaszczyznowe i wzajemnie wymijające się okręgi określają w sposób jednoznaczny niezdegenerowaną krzywą stopnia drugiego, będącą zbiorem punktów równoodległych od tych okręgów. Jeżeli okręgi te wymijają się wewnątrznie, to otrzymujemy elipsę/okrąg, a jeżeli zewnętrznie to generują hiperbolę. W przypadku gdy jeden z tych okręgów jest prostą zbiorem punktów równoodległych od takich okręgów jest parabola. Przed podaniem algorytmu konstrukcji należy uprzednio znaleźć środek M okręgu antyiwersyjnego, który jest również w sposób jednoznaczny określony za pomocą wymijających się okręgów.

W tym celu przez środki tych okręgów $t(O, R)$ i $f(S, r)$ prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny rysunku. Płaszczyzna przecina te okręgi odpowiednio w punktach T_i ($i=1,2$) i F_i ($i=1,2$). W kładzie tej płaszczyzny na płaszczyznę rysunku wykreślamy półokręgi c_i ($i=1,2$) o średnicach $T_i F_i$ ($i=1,2$), a następnie ich punkt przecięcia A rzutujemy na płaszczyznę rysunku. Punkt $M = A'$ jest szukanym środkiem okręgu antyiwersyjnego o promieniu $a = AM$. Jeżeli jeden z tych dwóch okręgów np. f jest prostą, to punkt M jest tym punktem z dwu punktów przecięcia okręgu t prostą, zawierającą jego środek i prostopadłą do prostej f , który znajduje się bliżej tej prostej.

Algorytm konstrukcji nr 1 (rys.14)

- m_i - dowolny promień pęku prostych $M(m_i)$
- $m_i \cap t = T_i^j$ ($j=1 / j=1,2$)
- $OT_i^j = a_i^j$
- $m_i \cap f = F_i^j$
- $SF_i^j = b_i^j$ (dla $j=1$; $b_i^j \perp f$)
- $a_i^j \cap b_i^j = S_i^j$ - punkt (y) stożkowej
- $S_i^j \subset s_i^j \perp m_i$ - styczna (e) do stożkowej w p. S_i^j





Rys. 14

4.2 Konstrukcja stożkowej określonej punktem i okręgiem

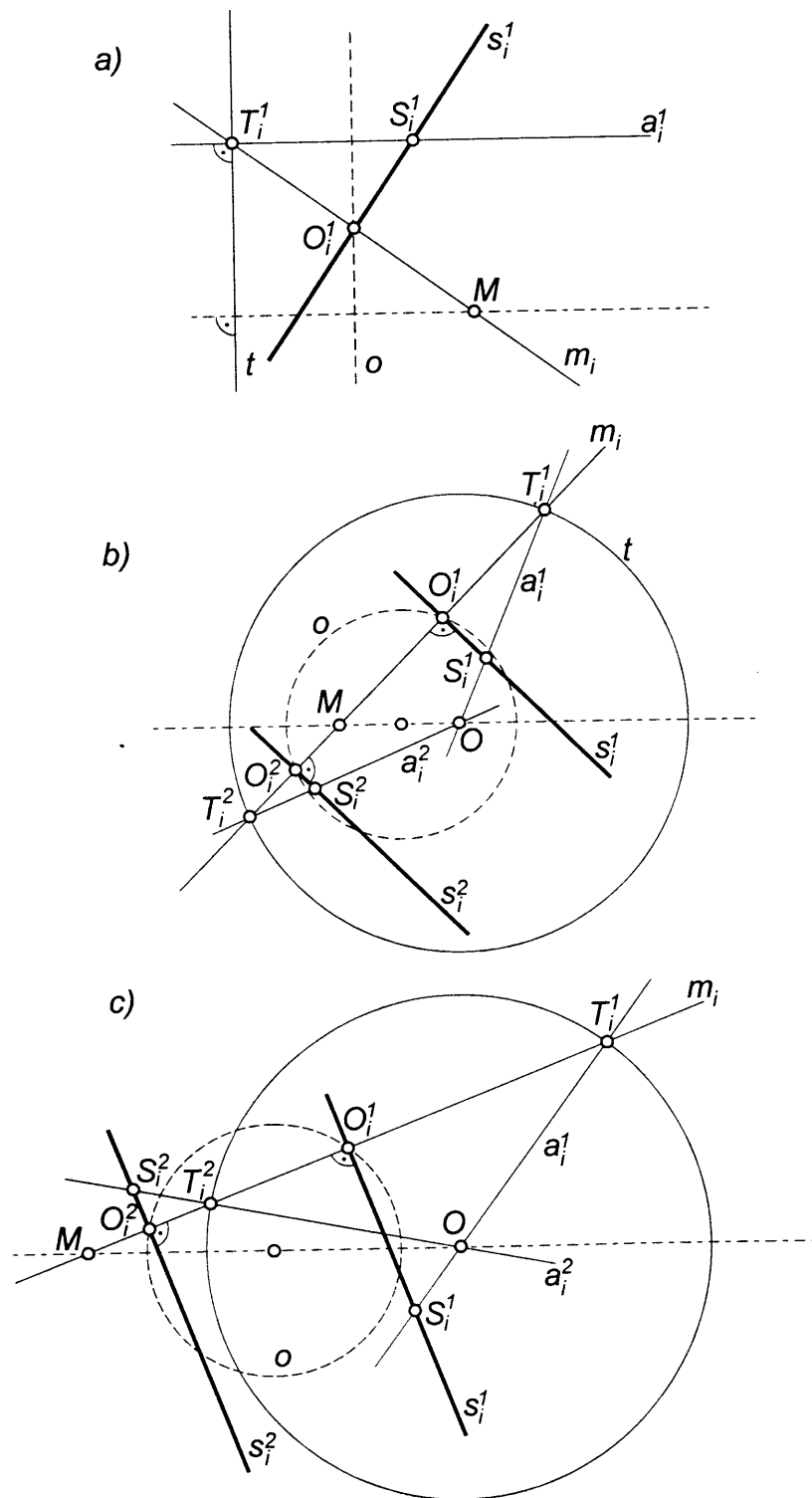
Z kolei z rozważań p.3.4 wynika, iż stały punkt płaszczyzny i jej okrąg nie zawierający tego punktu określają w sposób jednoznaczny niezdegenerowaną stożkową jako zbiór punktów równoodległych od punktu i okręgu. Jeżeli punkt ten leży wewnątrz okręgu, to określona jest elipsa/okrąg, a jeżeli jest punktem zewnętrznym, to otrzymujemy hiperbolę. W przypadku, gdy okrąg jest prostą, zbiorem punktów równoodległych od stałego punktu i stałej prostej jest parabola.

Przed przystąpieniem do konstrukcji stożkowej wykreślamy okrąg/prostą o będący m.g. środków O_i odcinków MT_i . Okrąg ten jest podobny do okręgu t (o środku podobieństwa w punkcie M) i promieniu równym połowie promienia okręgu t .

Algorytm konstrukcji nr 2 (rys.15)

- m_i - dowolny promień pęku prostych $M(m_i)$

- $m_i \cap t = T_i^j$ ($j=1 / j=1,2$)
- $m_i \cap o = O_i^j$
- $OT_i^j = a_i^j$ (dla $j=1$; $a_i^j \perp t$)
- $O_i^j \subset s_i^j \perp m_i$ - styczna (e) do stożkowej
- $a_i^j \cap s_i^j = S_i^j$ - punkt (y) styczności



Rys. 15

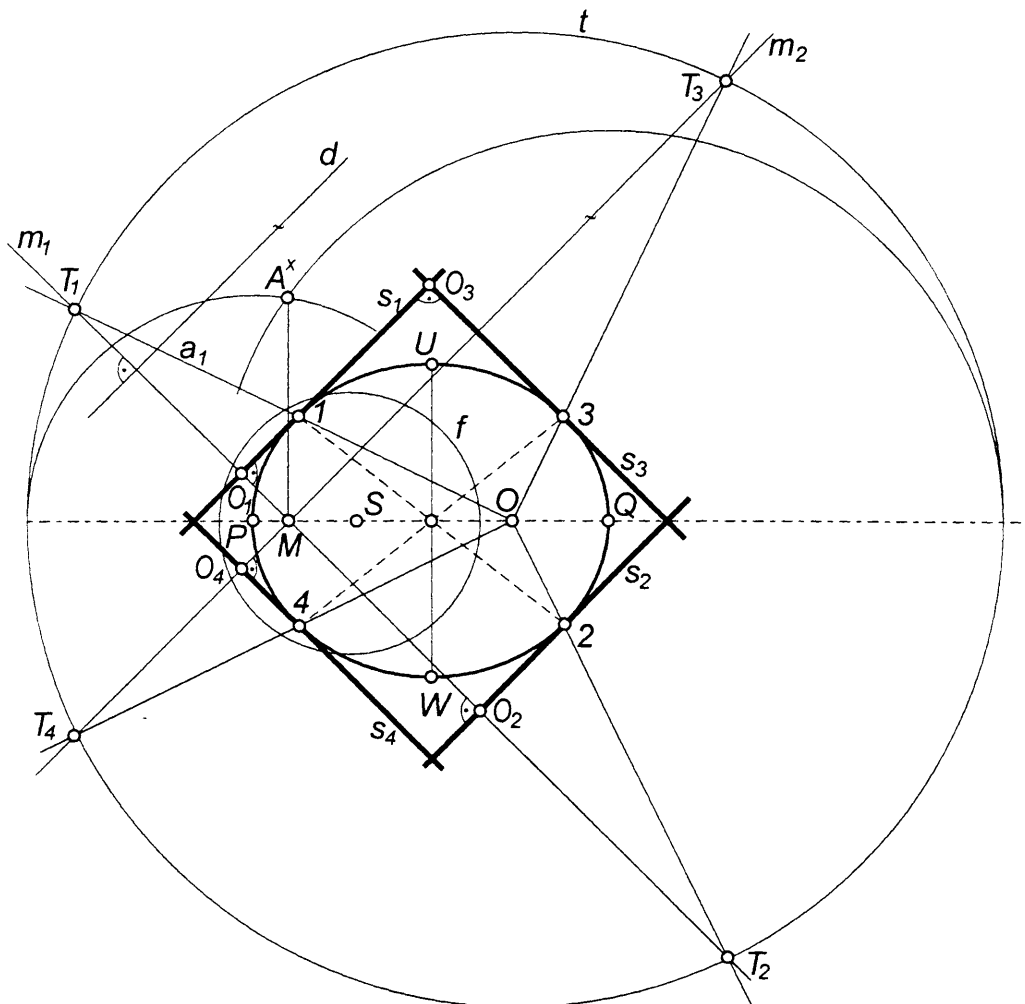
Jako przykłady ilustrujące zastosowanie tych konstrukcji są rozwiązane dwa zadania

Zadanie 1

Dana jest niezdegenerowana stożkowa określona za pomocą dwóch wewnętrznie wymijających się okręgów (niewspółśrodkowych) oraz dowolna prosta zawarta w jej płaszczyźnie. Należy wykreślić styczne do tej stożkowej wraz ich punktami styczności równoległe/prostopadłe do danej prostej.

Rozwiązanie zadania 1 (rys.16)

Założmy, że dana prosta d nie jest prostopadła do prostej łączącej środki O i S danych okręgów t i f . Jeżeli styczne do tej stożkowej s_i ($i=1,2$) / s_i ($i=3,4$) mają być równoległe/prostopadłe do danej prostej d , to po uprzednim znalezieniu środka M okręgu antyinwersyjnego (p.4.1) prowadzimy przez niego promień m_i ($i=1,2$) pęku prostych $M(m_i)$ prostopadły/równoległy do danej prostej d . Następnie korzystając z algorytmu konstrukcji nr 1 wykreślamy odpowiednie styczne wraz z ich punktami styczności spełniające założone warunki. Tak skonstruowane dwie średnice elipsy (ogólnie stożkowej) nie są jej parą średnic sprzężonych co łatwo zobaczyć na rys.16. Przy założeniu, że dana prosta d jest prostopadła do prostej łączącej środki danych okręgów rozwiązaniem tego zadania są styczne do elipsy w punktach ograniczających jej osie PQ i UW (rys.16).



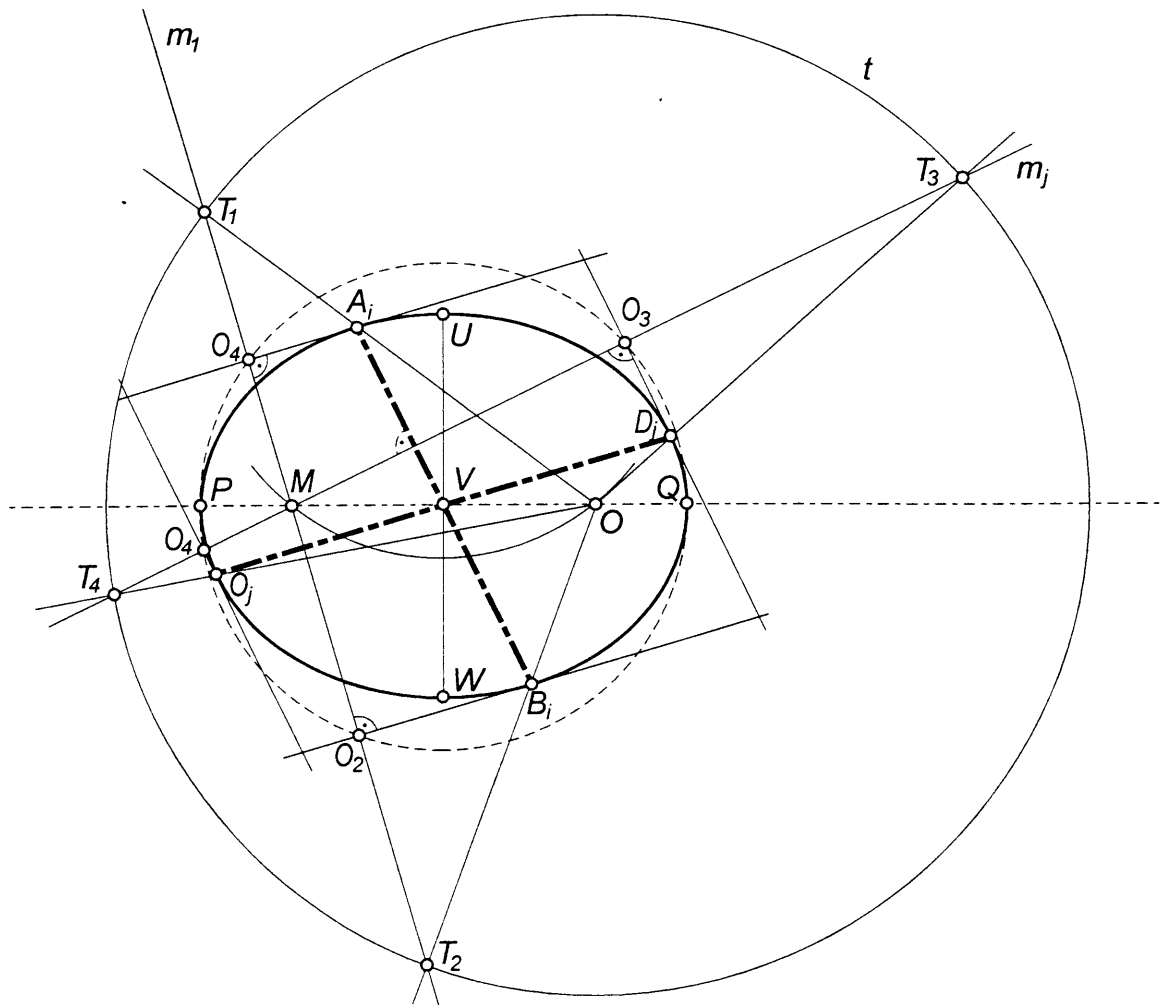
Rys. 16

Zadanie 2

Dla elipsy określonej osiami znaleźć dowolną parę jej średnic sprzężonych

Rozwiązanie zadania 2 (rys.17)

Znając osie PQ i UW danej elipsy wyznaczamy jej ogniska. Z rozważań p.3.4.1. wynika, że sposób określenia elipsy za pomocą osi i ognisk jest równoważny ze sposobem określenia jej za pomocą punktu i okręgu. Tak więc jedno z tych ognisk przyjmujemy jako wierzchołek pęku prostych $M(m_i)$, zaś drugie za środek O okręgu t o promieniu $R = PQ$. Następnie dla dowolnego promienia m_i pęku prostych $M(m_i)$ za pomocą algorytmu konstrukcji nr 2 wyznaczamy średnicę A_iB_i elipsy wraz ze stycznymi w tych punktach. Prowadząc przez punkt M promień m_j prostopadły do uprzednio skonstruowanej średnicy A_iB_i oraz wykorzystując po raz drugi ten sam algorytm otrzymujemy drugą średnicę C_jD_j , której styczne w punktach ją ograniczających są równoległe do średnicy A_iB_i (zadanie 1). Wynika stąd, że promienie m_i i m_j pęku prostych $M(m_i)$ są promieniami sprzężonymi, a tym samym skonstruowane średnice A_iB_i i C_jD_j są parą średnic sprzężonych stożkowej (rys.17).



Rys. 17

5. Wnioski końcowe

- 5.1. Krzywe stopnia drugiego można traktować jako zbiory środków sfer przechodzących przez dwa różne bądź jednoczące się punkty i zarazem stycznych do prostej, płaszczyzny albo sfery.
- 5.2. Zbiorem środków sfer w przestrzeni, które zawierają punkt i są styczne do płaszczyzny/sfery może być sfera, elipsoida obrotowa wydłużona, paraboloida obrotowa i hiperboloida obrotowa dwupowłokowa.
- 5.3. Miejscem geometrycznym punktów styczności rozważonych sfer z prostą, płaszczyzną bądź sferą może być punkt, para punktów, prosta, płaszczyzna, okrąg (mały i wielki) i sfera.
- 5.4. Dwa współpłaszczyznowe i wzajemnie wymijające się okręgi określają antyinwersję.
- 5.5. Antyinwersja na płaszczyźnie może być realizowana za pomocą stożków normalnych o wspólnym wierzchołku i wspólnej wysokości.
- 5.6. Zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od jej dwóch stałych i wzajemnie wymijających się okręgów jest niezdegenerowana krzywa stopnia drugiego.
- 5.7. Zbiorem punktów płaszczyzny równo oddalonych od stałego jej punktu i okręgu/prostej jest niezdegenerowana krzywa stopnia drugiego (rozszerzenie znanej definicji paraboli na pozostałe stożkowe)
- 5.8. Wprowadzono pojęcie "ruchomego" ogniska dla stożkowej określonej dwoma wymijającymi się okręgami jako antyinwersyjnego obrazu punktu styczności sfery z płaszczyzną bądź sferą.
- 5.9. Zbiorem ruchomych ognisk okręgu, elipsy i hiperboli jest zawsze okrąg, paraboli - okrąg bądź prosta.
- 5.10. Krzywą spodkową stożkowej określonej za pomocą stałego punktu i okręgu/prostej jest okrąg/prosta.
- 5.11. Krzywą spodkową stożkowej określonej dwoma stałymi wzajemnie wymijającymi się okręgami jest krzywa stopnia czwartego, krzywa stopnia trzeciego bądź okrąg.
- 5.12. Zaproponowane algorytmy konstrukcji jednakowe dla każdej stożkowej (niezdegenerowanej) pozwalają na kreślenie stycznych wraz z ich punktami styczności.

LITERATURA:

- [1]. Ż. ADAMAR: Elementarna geometria, cz.II, Stereometria, Uczpedgis, Moskwa 1951r
- [2]. H. S. M. COXETER: Wstęp do geometrii dawnej i nowej, PWN, W-wa 1967r
- [3]. D. HILBERT, S. COHN-VOSSSEN: Geometria pogładowa, PWN, W-wa 1956r
- [4]. S. OCHOŃSKI: Stożkowe jako zbiory środków sfer przechodzących przez dwa punkty i stycznych do prostej, płaszczyzny bądź sfery. Materiały Konferencji o Geometrii, Częstochowa, 24-25 września 1999r

- [2]. H. S. M. COXETER: Wstęp do geometrii dawnej i nowej, PWN, W-wa 1967r
[3]. D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN: Geometria pogładowa, PWN, W-wa 1956r
[4]. S. OCHOŃSKI: Stożkowe jako zbiory środków sfer przechodzących przez dwa punkty i stycznych do prostej, płaszczyzny bądź sfery. Materiały Konferencji o Geometrii, Częstochowa, 24-25 września 1999r

CONICS AS SETS OF CENTERS OF SPHERES PASSING THROUGH TWO POINTS AND TANGENT TO STRAIGHT LINE, PLANE OR SPHERE

The paper presents results of studies on sets of centers of spheres containing two different points or common point, and at the same time tangent to straight line, plane or sphere.

The studies proved that these sets are conics and in the case of spheres passing through point and tangent to the plane or sphere – surfaces of revolution in the form of sphere, ellipsoid, paraboloid and double-sheet hyperboloid. Well known definition of parabola, as a set of equally – distant points from fixed point and straight line, has been extended to the remaining nondegenerated conics via exchange straight line into circle. In this work original general definition of nondegenerated conics as a set of equally – distant points from two fixed and coplanar reciprocally passing circles was also given. Only one of these sets can be the straight line. It has been proved that two of these circles define anti-inversion and it could be realised on plane with orthogonal cones with common vertex and height. The results of these studies were also two algorithms of universal kinematic conic constructions which let us determine tangent line with its tangent point. The solutions of two exercises are given as illustrating examples there.

Rec. dr inż. Janina GŁOMB