Marian PALEJ
Centre of Geometry and Engineering Graphics
Silesian University of Technology in Gliwice

SOME THEOREM CONCERNING THE CONICS STREAKS AND PENCILS AND ITS APPLICATION TO SMOOTH CONNECTION OF CONICS ARCS

In the paper [1] and [2] one theorem concerning particular streaks and pencils of conics is discussed. The peculiarity of the considered streaks and pencils consists in the kind of their base, which is composed of two pairs of coinciding elements /two tangents with points of tangency in the case of streaks or two points with tangents in them - in the case of pencils/.

The theorem in [1] is from some properties of conics streaks traced back - properties revealed by Prof. S. Szerszen by means of perpectograph of De La Fresnaye. In [2] the theorem is as conclusion of particular properties of parabolas streaks and pencils drawn. The construction of tangents and points of tangency to a hyperbola reveals one more way of proving the considered theorem, the way which seems, to be the simplest one.

Let us take a streak of hyperbolas, which base is composed of two asymptotes. Let us choose on one of them e.g. $\boldsymbol{c=d}$ /Fig.1/ an arbitrary point $\boldsymbol{Q}$ and draw the line $\boldsymbol{f}$ parallel to the asymptote $\boldsymbol{a=b}$ and going halves in distance between this asymptote and point $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{f \parallel a}$, $\rho_{a,f} = \rho_{f,O}$. We can remark, that $\boldsymbol{f}$ is a line containing all middlepoints of the rays of pencil **/Q/** limited by asymptote $\boldsymbol{a=b}$. It means that the points lying on $\boldsymbol{f}$ are the points of tangency between the rays of pencil **/Q/** and all the hyperbolas of our streak. Assuming that the considered streak of hyperbolas is surrendered to a projective transformation we can obtain the streak of other conics, which base is created by two tangents $\boldsymbol{a_s}$, $\boldsymbol{c_s}$ with their points of tangency $\boldsymbol{A_s}$, $\boldsymbol{C_s}$, /Fig 2/. The transformed point $\boldsymbol{Q}$ - $\boldsymbol{Q_s}$ will be lying on $\boldsymbol{c_s}$ and the pencil **/Q/** of tangents to hyperbolas will be transformed in the pencil **/$\boldsymbol{Q_s}$/** of tangents to other, new conics. As result of our transformation the line $\boldsymbol{f}$ parallel to the asymptote $\boldsymbol{a=b}$ i.e.

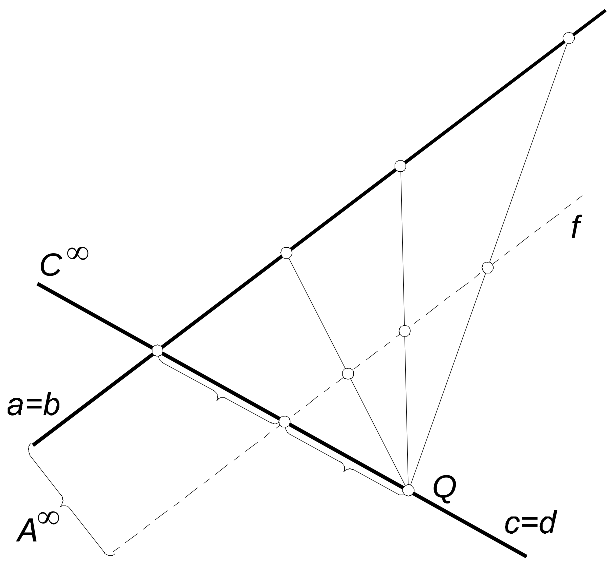

Fig.1

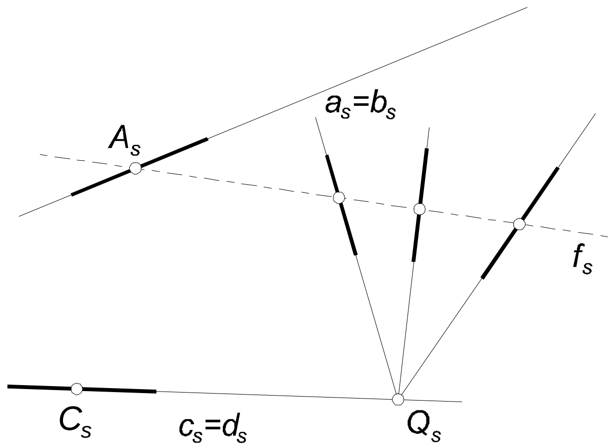

Fig.2

passing through the point at infinity A^{∞} will be line f_s passing through the basic point of tangency A_s. From this we can conclude the following property of a streak of conics:

points of tangency of the pencil lines /Q_s/ to the conics of a streak, which base is composed of two pairs of coinciding tangents, are lying on one straight line f_s ; the line f_s passes through one of the given basic points of tangency , different from the one, which lies on the tangent including centre Q_s . .../1/

By analogy with above let us take into consideration a line q parallel to one asymptote of the base of the hyperbolas pencil /Fig.3/ i.e. $q \,//\, A^{\infty} = B^{\infty}$. In the point $q \cap s = S$, where, by s is denoted the bisectrix of the angle between asymptotes of hyperbolas , let us drawn the line t perpendicular to s: $t \perp s$. Let us denote as T the common point: $t \cap C^{\infty}D^{\infty} = T$. We can remark that the points of the range /q/ are middlepoints of segments of pencil rays /T/. Having transformed the pencil of hyperbolas by a projective transformation to a pencil of other conics we obtain the situation: as in Fig. 4. Describing it we establish the following statement:

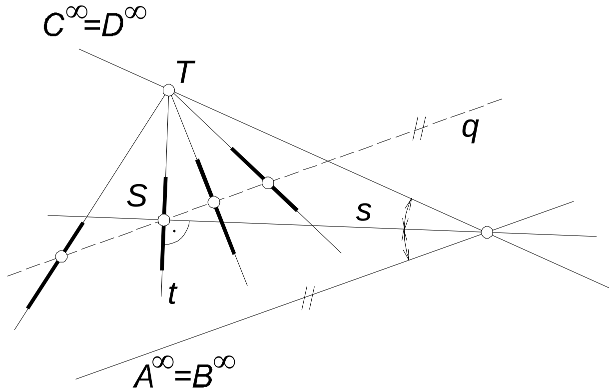

Fig.3

the tangents to the pencil conics, which base is composed of two pairs of coinciding points - in the points lying on an arbitrary line passing through one of the basic points e.g. $A_s = B_s$, are intersecting in one point T_s ; the point T_s lies on the line determined by different from $A_s = B_s$ basic points. . . . . /2/

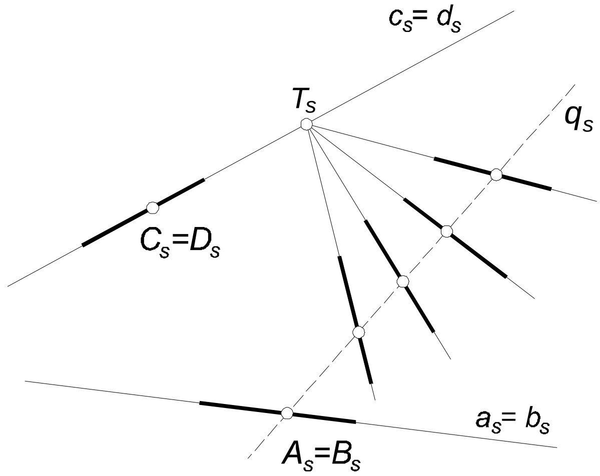

Fig. 4

It is easy to conclude that theorems /1/ and /2/ are dual.
Let us consider the possibility of application of theorems /1/ or /2/ to smooth connection of the conics arcs. For this purpose let us take assumptions defining two streaks /pencils/ of conics $\{s_1^2\}$ and $\{s_2^2\}$, which bases are composed of coinciding in pairs elements. So in the Fig. 5 we have tangents $a_1 = b_1 \in A_1$ and $c_1 = d_1 \in C_1$ defining the streak $\{s_1^2\}$ and tangents $a_2 = b_2 \in A_2$ and $c_2 = d_2 \in C_2$ defining the streak $\{s_2^2\}$. Through the point $a_1 \cap a_2 = Q$ let us construct such line u, which will be tangent simultaneoesly to the conic of streak $\{s_1^2\}$ and of streak $\{s_2^2\}$. For this purpose two auxiliary lines will be constructed : the line $q_1 \in C_1$ and $q_2 \in C_2$ including points, in which the lines of pencil /Q/ are correspondingly tangent to the conics of the streak $\{s_1^2\}$ and $\{s_2^2\}$. We draw line q_1 by means of the point $T_1 = t_1 \cap l_1$, where $t_1 \in Q$ and $t_1 \,//\, A_1C_1$, whereas l_1 is conjugated with direction A_1C_1 diameter of conics of the streak $\{s_1^2\}$ - and the line q_2 is constructed

with the aid of the analogous point $T_2 = t_2 \cap l_2$, where $t_2 \,//\, A_2C_2$ and l_2 is conjugated with direction A_2C_2 diameter of the conics belonging to the streak $\{s_2{}^2\}$. The common point of the lines q_1 and q_2: $U = q_1 \cap q_2$
is the point of tangency of a line u_1 to a conic of the streak $\{s_1{}^2\}$ and simultaneously - of a line u_2 - to a conic of the streak $\{s_2{}^2\}$, besides because of belonging to common point Q the lines u_1 and u_2 are identical: $u_1 = u_2 = u$. In this way we have the line u tangent to two conics at the same time : $s_1{}^2 / a_1 = b_1\ , c_1 = d_1, u\ /$ and $s_2{}^2 / a_2 = b_2\ , c_2 = d_2, u\ /$. In the common point of tangency U the curve composed of the arcs of both conics has its bendpoint and the transition from conic s_1^2 to conic s_2^2 can be treated as realisation of a smooth connection of the conics.

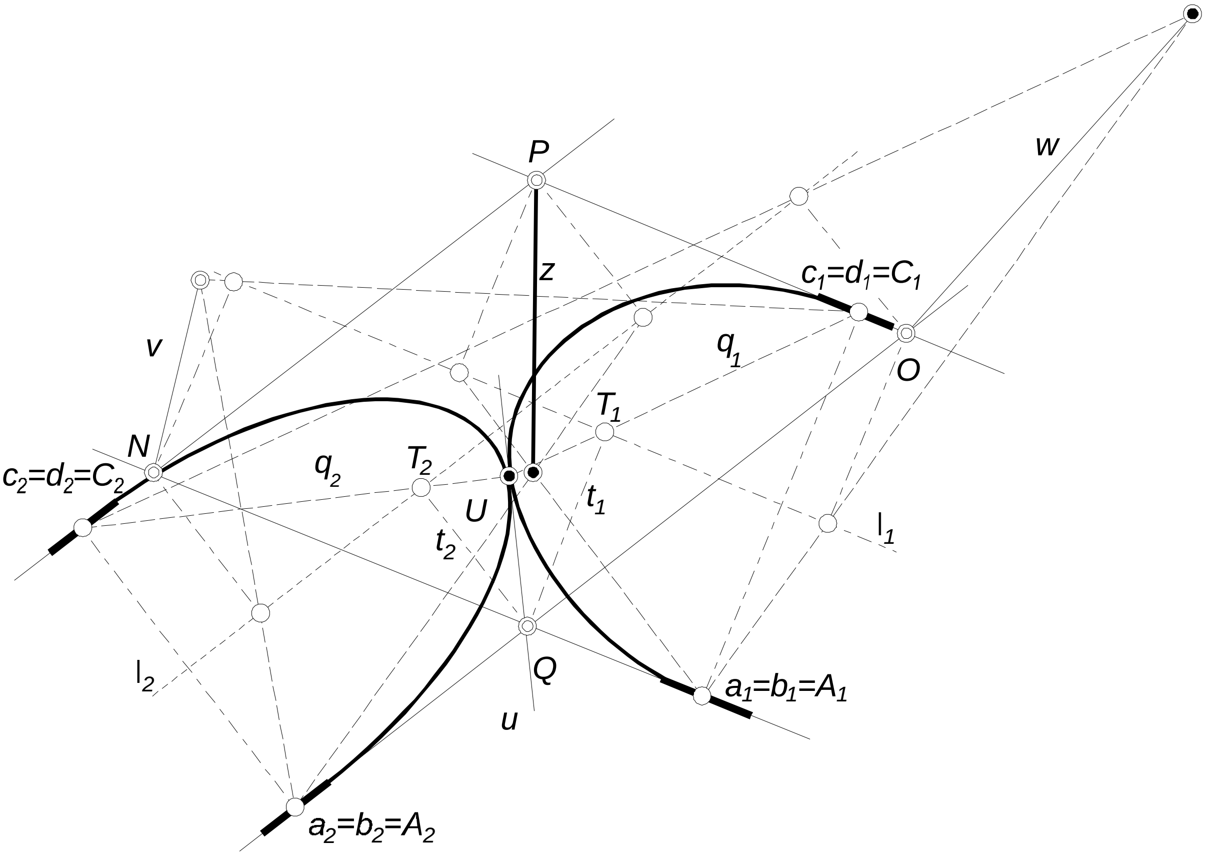

Fig.5

Regarding the successive points of intersecting of the left pairs of basic tangents to the conics $\{s_1{}^2\}$ and $\{s_2{}^2\}$ one can find the following common tangents to considered second order curves. In Fig.5 there are the lines: $v \in N = a_1 \cap c_2$, $w \in O = a_2 \cap c_1$, and $z = P \in c_1 \cap c_2$. It can also happen that one of the basic tangents of the streak $\{s_1{}^2\}$ e.g. a_1 concides with the basic tangent a_2 of the conic from $\{s_2{}^2\}$. Fig.6 illustrates such

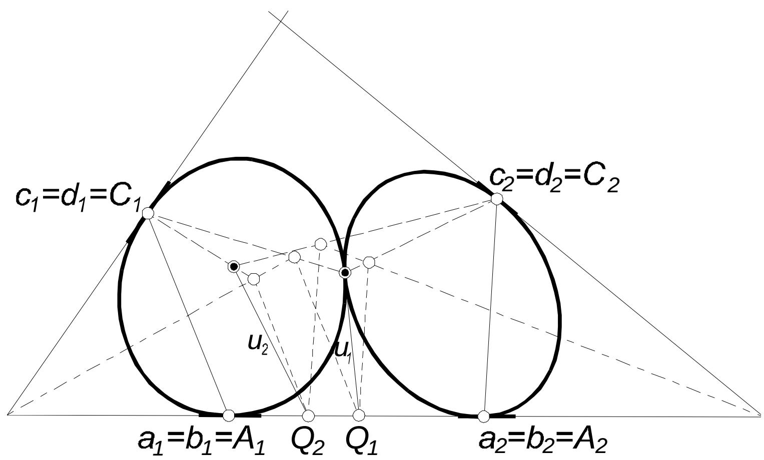

Fig.6

a case. What is more it may appear that for suitably given assumptions there are coincided lines q_1 and q_2 . Fig. 7 is an illustration of such case. The coinciding of the lines q_1 and q_2 means that there is infinitude of lines passing trough the point $Q = a_1 \cap a_2$, tangent at the same time to the conics of the streak $\{s_1{}^2\}$ and $\{s_2{}^2\}$.

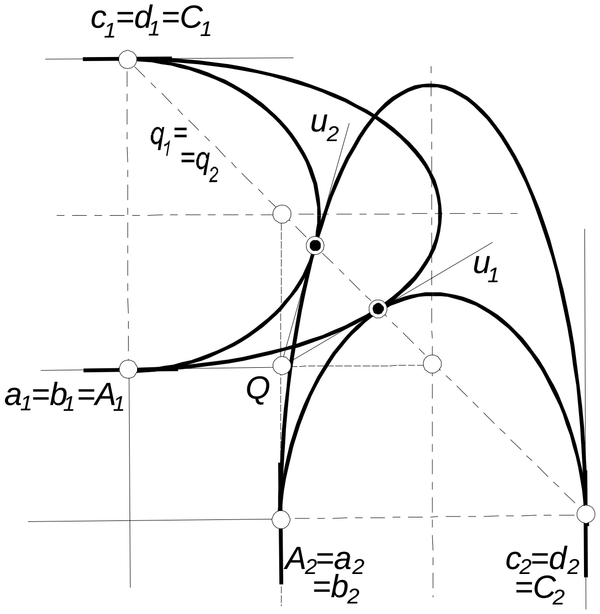

Fig. 7.

REFERENCES:

[1] M. Palej - „Uogólnienie jednej z własności szczególnego pasma stożkowych ujawnionej przez Prof.S.Szerszenia za pomocą perspektografu De La Fresnaye'a" - Materiały Konferencji o Geometrii - Częstochowa, 24-25.IX.1999.

[2] M. Palej - „Elementarne uzasadnienie jednolitej konstrukcji stycznych i punktów styczności krzywych stopnia drugiego" - Biuletyn Polskiego Towarzystwa Geometrii i Grafiki Inżynierskiej, nr 8. Gliwice,1999.

O PEWNYM TWIERDZENIU DOTYCZĄCYM PASMA I PĘKU STOŻKOWYCH I JEGO ZASTOSOWANIU DO GŁADKIEGO ŁĄCZENIA ŁUKÓW KRZYWYCH STOPNIA DRUGIEGO

W pracach /1/ i /2/ omawiano pewne twierdzenie dotyczące pasma i pęku stożkowych w przypadku kiedy bazą pasma lub pęku są cztery elementy zjednoczone parami, tj. kiedy baza pasma składa się z dwóch stycznych wraz z punktami styczności lub - dwoiście - bazę pęku stanowią dwa punkty stożkowych wraz z stycznymi w tych punktach.

Twierdzenie wyprowadzono w /1/ odwołując się do uogólnienia niektórych własności stożkowych pasma ujawnionych przez Prof. S. Szerszenia za pomocą perspektografu de La Fresnaye, a w /2/ - za pomocą szczególnych własności pasma i pęku parabol. Konstrukcja stycznych i punktów styczności hiperboli ukazuje jeszcze jedną drogę, tym razem chyba najprostszą, prowadzącą do sformułowania tego twierdzenia bądź tez stanowiącą jego elementarny dowód.

Niech dane będzie pasmo hiperbol, którego bazą są dwie asymptoty, tj. zjednoczone parami styczne $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ przy czym $\boldsymbol{a}\cap\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^{\infty}$ i $\boldsymbol{c}\cap\boldsymbol{d}=\boldsymbol{C}^{\infty}$ /rys.1/. Obierzmy na jednej z asymptot np. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ dowolny punkt $\boldsymbol{Q}$ i poprowadźmy prostą $\boldsymbol{f}$ równoległą do drugiej asymptoty /$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ /, połowiącą jej odległość od punktu $\boldsymbol{Q}$, tj. : $\boldsymbol{f} \parallel \boldsymbol{a}$, $\rho_{a,f} = \rho_{f,Q}$. Zauważmy, że prosta $\boldsymbol{f}$ jest linią środków odcinków promieni pęku /$\boldsymbol{Q}$/ ograniczonych asymptotą $a = b$. Oznacza to, że na prostej f leżą punkty styczności do hiperbol pasma o bazie $/a = b, c = d/$ tych stycznych, które są elementami pęku prostych $/Q/$

Jeżeli założymy, że rozpatrywane pasmo hiperbol poddamy dowolnemu przekształceniu rzutowemu /np. poprzez rzut środkowy/ wówczas pasmo to przejdzie w pasmo stożkowych określone przez dwie dowolnie położone, zjednoczone proste styczne $a_s = b_s$ i $c_s = d_s$ tj. dwie dowolne styczne a_s, c_s wraz z punktami styczności A_s, C_s /rys.2/. Punkt Q incydentny z asymptotą $c = d$ przejdzie w punkt $Q_s \in c_s$, a pęk stycznych $/Q/$ do hiperbol - w pęk stycznych $/Q_s/$ do stożkowych. Prosta f przechodząca przez niewłaściwy punkt A^∞ asymptoty $a = b$ będzie po przekształceniu prostą f_s przechodzącą przez punkt A_s.

Wnosimy więc, że w paśmie stożkowych, którego bazą są dwie styczne wraz z punktami styczności: $a_s \in A_s$ i $c_s \in C_s$ proste pęku $/Q_s/$ o środku leżącym na jednej z tych stycznych /np. $Q_s \in a_s$ / stykają się z stożkowymi pasma w punktach współliniowych. Relacja powyższa jest przedmiotem twierdzenia /3/ publikowanego w pracy /2/

Z kolei weźmy pod uwagę pęk hiperbol określony dwiema parami zjednoczonych punktów niewłaściwych np. $A^\infty = B^\infty$ i $C^\infty = D^\infty$ tj. dwiema asymptotami /rys.3/. Rozważmy dowolną prostą q równoległą do jednej z asymptot np. $q \,//\, A^\infty = B^\infty$. W punkcie wspólnym $q \cap s$, gdzie s jest symetralną kąta utworzonego przez asymptoty poprowadźmy prostą t prostopadłą do s. Oznaczmy przez T punkt przecięcia $t \cap /C^\infty = D^\infty/$. Zauważmy, że punkty szeregu o podstawie q są środkami odcinków promieni o wierzchołku T ograniczonych asymptotą $A^\infty B^\infty$. Są to więc punkty styczności do hiperbol pęku stycznych przechodzących przez punkt T.

Dokonując jak poprzednio dowolnego przekształcenia rzutowego rozpatrywanego pęku hiperbol otrzymamy pęk stożkowych określonych jak na rys.4. Z rysunku tego możemy odczytać, że w pęku stożkowych, którego bazę stanowią dwa punkty wraz z przynależnymi do nich stycznymi /np. $A_s \in a_s$ i $C_s \in c_s$/, styczne do poszczególnych stożkowych w punktach szeregu o podstawie przechodzącej przez jeden z punktów bazy, są współpunktowe. Relacja taka jest przedmiotem twierdzenia /4/ publikowanego w /2/.

Zajmijmy się możliwością wykorzystania omawianych twierdzeń do gładkiego łączenia krzywych stopnia drugiego. Przyjmijmy w tym celu założenia definiujące dwa pasma /pęki/ stożkowych $\{ s_1^2 \}$ i $\{ s_2^2 \}$, których bazy składają się z jednoczących się parami elementów. Niech na rys.5 będą to styczne $a_1 = b_1 = A_1$ i $c_1 = d_1 = C_1$ precyzujące pasmo $\{ s_1^2 \}$ oraz styczne $a_2 = b_2 = A_2$ i $c_2 = d_2 = C_2$ ustalające pasmo $\{ s_2^2 \}$. Przez punkt $a_1 \cap a_2 = Q$ poprowadźmy taką prostą u, która będzie jednocześnie styczna do stożkowej pasma $\{ s_1^2 \}$ oraz do stożkowej pasma $\{ s_2^2 \}$. W tym celu skonstruujmy prostą $q_1 \in C_1$ zawierającą punkty styczności stycznych pęku $/Q/$ do stożkowych pasma $\{ s_1^2 \}$ oraz prostą $q_2 \in C_2$ zawierającą punkty styczności stycznych pęku $/Q/$ do stożkowych pasma $\{ s_2^2 \}$. Prostą q_1 wyznaczamy za pomocą punktu $T_1 = t_1 \cap l_1$ gdzie $t_1 \in Q$ i $t_1 \,//\, A_1 C_1$, a l_1 jest średnicą stożkowych zbioru $\{ s_1^2 \}$ sprzężoną z kierunkiem $A_1 C_1$, natomiast prostą $q_2 \in C_2$ - za pomocą analogicznie konstruowanego punktu $T_2 = t_2 \cap l_2$, $t_2 \,//\, A_2 C_2$ /2/.

Punkt wspólny prostych q_1 i q_2 : $U = q_1 \cap q_2$ jest punktem styczności stycznej u_1 do stożkowej pasma $\{ s_1^2 \}$ oraz stycznej u_2 - do stożkowej zbioru $\{ s_2^2 \}$, przy czym ponieważ obydwie te styczne przechodzą przez punkt Q - są one identyczne. Tak więc $u_1 = u_2 = u$ jest prostą wspólnie styczną do dwóch stożkowych : $s_1^2 / a_1 = b_1, c_1 = d_1, u /$ i $s_2^2 / a_2 = b_2, c_2 = d_2, u /$. W wspólnym punkcie styczności U krzywa złożona z łuków obydwu stożkowych ma swój punkt przegięcia, a przejście z stożkowej s_1^2 do stożkowej s_2^2 można uważać za realizację gładkiego połączenia obydwu stożkowych.

Rozpatrując kolejne punkty przecięcia pozostałych par stycznych do pasma $\{s_1^2\}$ i $\{s_2^2\}$
można znaleźć dalsze wspólne styczne do rozpatrywanych stożkowych. Na rys.5 są to proste $v \in N = a_1 \cap c_2$, $w \in O = a_2 \cap c_1$ i $z \in P = c_1 \cap c_2$. Może się zdarzyć, że jedna z stycznych bazy pasma $\{s_1^2\}$ np. a_1 pokrywa się z styczną a_2 pasma $\{s_2^2\}$. Wówczas punktów Q z rys.5 mamy nieskończenie wiele. Przypadek taki ilustruje rysunek 6. Może wreszcie, przy odpowiednio przyjętych założeniach dochodzić do jednoczenia się prostych q_1 i q_2 . Sytuację taką przedstawia rys. 7. Pokrywanie się prostych q_1 i q_2 oznacza, że z punktu $Q = a_1 \cap a_2$ można poprowadzić nieskończenie wiele takich prostych, z których każda jest jednocześnie styczna do stożkowych pasma $\{s_1^2\}$ i $\{s_2^2\}$.

Translated by: mgr Barbara SKARKA