Stanisław OCHOŃSKI
os. Mistrzejowice Nowe 6/5
31-640 Kraków

STOŻKOWE JAKO ZBIORY ŚRODKÓW SFER PRZECHODZĄCYCH PRZEZ DWA PUNKTY I STYCZNYCH DO PROSTEJ, PŁASZCZYZNY BĄDŹ SFERY

WSTĘP

W referacie o tym samym tytule, zgłoszonym na Konferencję o Geometrii zorganizowaną w Częstochowie (24-25 września 1999r), z okazji stulecia urodzin profesora Stanisława Szerszenia i pięćdziesięciolecia Politechniki Częstochowskiej, przedstawiono w dużym skrócie, niepełne wyniki rozważań dotyczących zbiorów środków sfer przechodzących przez dwa punkty i zarazem stycznych do prostej, płaszczyzny bądź sfery [4]. W przypadku dwu różnych punktów warunkiem istnienia takich sfer jest położenie ich po jednej stronie prostej, płaszczyzny/sfery i przynależność tylko jednego z nich do rozpatrywanych figur.

Pod koniec trzeciej dekady października 1999r na seminarium prowadzonym przez prof.zw.dr hab.inż.Mariana Paleja w Politechnice Śląskiej, piszący te słowa wygłosił referat nt.: "Krzywe stopnia drugiego określone na płaszczyźnie antyinwersyjnej dwoma wzajemnie wymijającymi się okręgami", w którym prezentowano dalsze wyniki badań nad tymi zbiorami sfer, oraz miejscami geometrycznymi ich punktów styczności z prostą, płaszczyzną/sferą.

Artykuł niniejszy jest kompilacją uzyskanych wyników badań w przedmiotowym zakresie przedstawionych w obydwu referatach, a także ich uzupełnieniem i rozszerzeniem wynikającym z aktualnego stanu wiedzy autora w tej dziedzinie. Inspiracją do podjęcia tych badań była lektura pracy [1] w szczególności dotycząca miejsc geometrycznych punktów styczności sfer z płaszczyzną/sferą, spełniających określone warunki.

1. Środki sfer stycznych do prostej i przechodzących przez dwa punkty

W punkcie tym zajmiemy się środkami sfer zawierających dwa różne bądź jednoczące się punkty ***A*** i ***B*** i stycznych do prostej ***a*** leżącej w tej samej płaszczyźnie co punkty ***A*** i ***B*** lub skośnej względem prostej określonej tymi punktami.

1.1. Prosta *AB* przecina prostą *a*

Jeżeli prosta ***AB*** przecina prostą ***a*** w punkcie ***W*** różnym od punktów ***A*** i ***B***, to długość odcinka ***WT*** stycznej, wychodzącej z tego punktu do dowolnej sfery zawierającej te punkty jest średnią geometryczną (proporcjonalną) odcinków ***WA*** i ***WB*** - potęga punktu względem okręgu/sfery [2]. Na prostej ***a*** istnieją dwa takie punkty $\boldsymbol{T_i}$ (i=1,2), w których sfery $\boldsymbol{\Omega_i}$ (i=1,2,) przechodzące przez punkty ***A*** i ***B*** są styczne do niej. Środki tych sfer $\boldsymbol{S_i}$ (i=1,2) są punktami, w których symetralna odcinka ***AB*** przecina proste $\boldsymbol{t_i}$ (i=1,2) zawierające punkty $\boldsymbol{T_i}$ (i=1,2) i prostopadłe do prostej ***a***. Jeżeli jeden z punktów końcowych odcinka ***AB*** zawarty jest w prostej ***a***, to istnieje dokładnie jedna sfera przechodząca przez punkty ***A*** i ***B*** i styczna do prostej ***a*** w punkcie ***A/B*** leżącym na niej. Gdy odcinek ***AB*** jest ponadto prostopadły do prostej ***a,*** to środek ***S*** tej sfery jest zarazem środkiem odcinka ***AB***. Jeżeli odcinek ten nie jest prostopadły do prostej $\boldsymbol{a}$, to środek $\boldsymbol{S}$ takiej sfery jest punktem, w którym symetralna odcinka $\boldsymbol{AB}$ przecina prostą $\boldsymbol{t}$ przechodzącą przez punkt $\boldsymbol{A/B}$ i prostopadłą do prostej $\boldsymbol{a}$.

1.2. Prosta *AB* równoległa do prostej *a*

Równoległość odcinka $\boldsymbol{AB}$ do prostej $\boldsymbol{a}$ implikuje istnienie tylko jednej sfery zawierającej jego punkty końcowe i zarazem stycznej do prostej $\boldsymbol{a}$. Punkt $\boldsymbol{T}$ styczności takiej sfery z prostą $\boldsymbol{a}$ jest punktem przecięcia jej symetralną odcinka $\boldsymbol{AB}$, a jej środek $\boldsymbol{S}$ jest z kolei punktem przecięcia tej symetralnej przez jedną z symetralnych odcinka $\boldsymbol{AT/BT}$.

1.3. Prosta *AB* skośna względem prostej *a*

Wykażemy, że zbiorem środków sfer przechodzących przez dwa różne punkty $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ i stycznych do prostej $\boldsymbol{a}$ skośnej względem odcinka $\boldsymbol{AB}$ jest parabola zawarta w płaszczyźnie symetralnej tego odcinka. Konstrukcja środków $\boldsymbol{S_i}$ takich sfer jest konsekwencją następującego rozumowania. Środki sfer przechodzących przez dwa różne punkty $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ zawarte są w płaszczyźnie μ symetralnej odcinka $\boldsymbol{AB}$, a środki sfer stycznych do prostej $\boldsymbol{a}$ w jej punktach $\boldsymbol{T_i}$, leżą w płaszczyznach τ_i zawierających punkty styczności i prostopadłych do prostej $\boldsymbol{a}$. Płaszczyzna μ przecina płaszczyzny τ_i w prostych $\boldsymbol{k_i}$ (pęk prostych równoległych) będących zbiorem środków sfer, które przechodzą przez punkty $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ albo są styczne do prostej a w punktach $\boldsymbol{T_i}$. Na każdej prostej $\boldsymbol{k_i}$ tego pęku istnieje dokładnie jeden taki punkt $\boldsymbol{S_i}$,który jest środkiem sfery Ω_i przechodzącej przez punkty $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ i zarazem stycznej do prostej $\boldsymbol{a}$. Tymi środkami $\boldsymbol{S_i}$ są punkty, w których płaszczyzny symetralne α_i/β_i odcinków $\boldsymbol{AT_i/BT_i}$ przecinają proste $\boldsymbol{k_i}$. Płaszczyzny symetralne α_i/β_i odcinków $\boldsymbol{AT_i/BT_i}$, ograniczonych stałym punktem $\boldsymbol{A/B}$ i poruszającymi się po prostej $\boldsymbol{a}$ punktami $\boldsymbol{T_i}$ opisują odpowiednio w przestrzeni paraboliczną powierzchnię walcową Φ_A/Φ_B, o tworzących prostopadłych do płaszczyzn φ_A/φ_B , określonych punktem $\boldsymbol{A/B}$ i prostą $\boldsymbol{a}$. Kierującymi tych powierzchni Φ_A/Φ_B są w płaszczyznach φ_A/φ_B parabole będące obwiedniami symetralnych tych samych odcinków $\boldsymbol{AT_i/BT_i}$, dla których punkt $\boldsymbol{A/B}$ jest ogniskiem, a prosta $\boldsymbol{a}$ wspólną ogniskową dla obydwu parabol. Płaszczyzna μ nierównoległa do tworzących powierzchni Φ_A/Φ_B przecina ją w paraboli będącej zbiorem środków $\boldsymbol{S_i}$ sfer Ω_i spełniających nałożone warunki. Środki tych sfer są punktami, w których płaszczyzny α_i/β_i symetralne odcinków $\boldsymbol{AT_i/BT_i}$ przecinają proste $\boldsymbol{k_i} = \mu \cap \tau_i$, a styczne w tych punktach do paraboli są prostymi, w których płaszczyzna μ przecina płaszczyzny α_i/β_i.

1.4. Punkt *A* i *B* jednoczą się

Jeżeli punkty $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ jednoczą się i punkt ten nie leży na prostej $\boldsymbol{a}$, to zbiorem środków $\boldsymbol{S_i}$ sfer Ω_i przechodzących przez ten punkt i stycznych do prostej $\boldsymbol{a}$ jest parabola, dla której punkt $\boldsymbol{M=A=B}$ jest ogniskiem, a prosta $\boldsymbol{a}$ jej kierownicą (znana definicja paraboli jako punktów równoodległych od stałego punktu i stałej prostej). Gdy natomiast punkt $\boldsymbol{M}$ zawarty jest w prostej $\boldsymbol{a}$ to zbiorem środków $\boldsymbol{S_i}$ sfer stycznych do niej w punkcie $\boldsymbol{M}$ jest płaszczyzna μ przechodząca przez ten punkt i prostopadła do prostej $\boldsymbol{a}$.

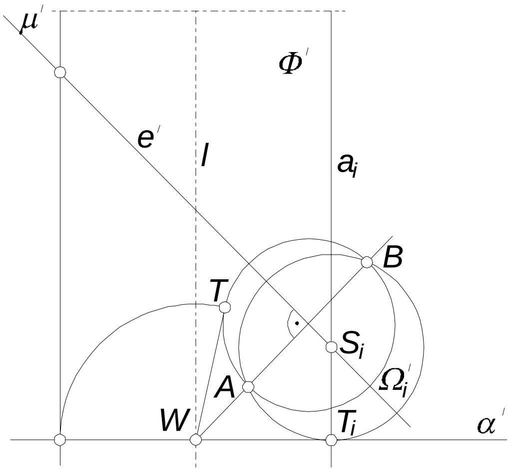
Tak więc zbiorami środków sfer przechodzących przez dwa punkty (różne/jednoczące się) i zarazem stycznych do prostej mogą być punkt, para punktów, płaszczyzna bądź parabola, a m.g. ich punktów styczności punkt, para punktów i prosta.

2. Środki sfer stycznych do płaszczyzny i przechodzących przez dwa punkty

Z kolei rozpatrzymy przypadek, w którym miejsce prostej zajmuje płaszczyzna. Zakładamy, że dane dwa punkty położone po jednej stronie płaszczyzny mogą być różne lub jednoczące się i tylko jeden z nich może być zawarty w płaszczyźnie.

2.1. Prosta *AB* przebija płaszczyznę α

Jeżeli prosta ***AB*** przebija płaszczyznę $\boldsymbol{\alpha}$ w jakimś punkcie ***W***, to długość odcinka ***WT*** każdej stycznej wychodzącej z tego punktu do dowolnej sfery zawierającej punkty ***A*** i ***B*** jest średnią geometryczną odcinków ***WA*** i ***WB***. Wynika stąd, iż m.g. punktów styczności $\boldsymbol{T_i}$ sfer $\boldsymbol{\Omega_i}$ z płaszczyzną $\boldsymbol{\alpha}$ jest okrąg $\widehat{\boldsymbol{t}}$ o środku w punkcie ***W*** i promieniu ***R=WT***. A zatem środki sfer stycznych do płaszczyzny $\boldsymbol{\alpha}$ będą leżały na prostych $\boldsymbol{a_i}$ prostopadłych do niej i przechodzących przez punkty $\boldsymbol{T_i}$ okręgu $\widehat{\boldsymbol{t}}$ ***(W,R)***. Proste $\boldsymbol{a_i}$ tworzą powierzchnię walcową obrotową $\boldsymbol{\Phi}$ o osi ***l*** prostopadłej do płaszczyzny okręgu $\widehat{\boldsymbol{t}}$, który jest jej kierującą (rys.1). Natomiast środki sfer przechodzących przez punkty ***A*** i ***B*** znajdują się na płaszczyźnie $\boldsymbol{\mu}$ symetralnej odcinka ***AB***. Tak więc zbiorem środków $\boldsymbol{S_i}$ sfer $\boldsymbol{\Omega_i}$ spełniających równocześnie obydwa warunki jest elipsa, w której płaszczyzna $\boldsymbol{\mu}$ przecina powierzchnię walcową $\boldsymbol{\Phi}$. Gdy odcinek ***AB*** z założenia jest prostopadły do płaszczyzny $\boldsymbol{\alpha}$, to zawarty on

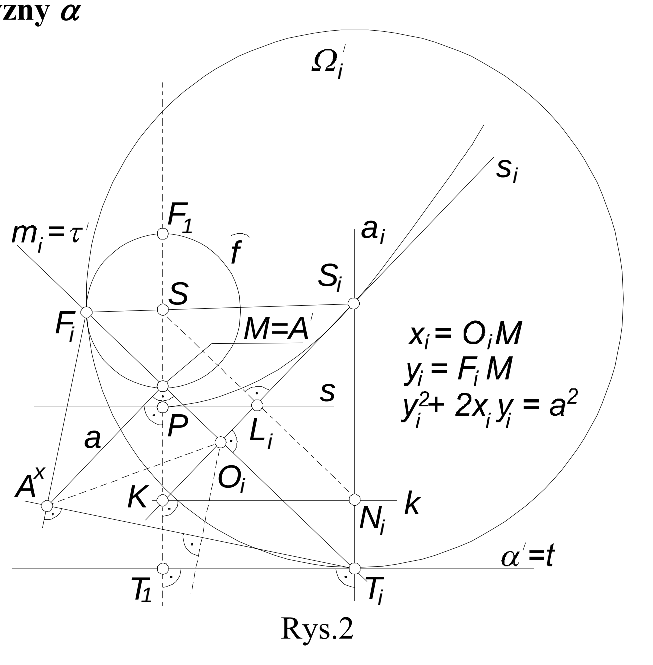


Rys.1

osi ***l*** tej powierzchni $\boldsymbol{\Phi}$ i wówczas płaszczyzna $\boldsymbol{\mu}$ symetralna tego odcinka przecina ją w okręgu. W przypadku ,w którym jeden z punktów końcowych odcinka ***AB*** leży w płaszczyźnie $\boldsymbol{\alpha}$, to istnieje tylko jedna sfera $\boldsymbol{\Omega}$ przechodząca przez te punkty i styczna do niej w punkcie ***A/B***. Jeżeli ponadto odcinek ***AB*** jest prostopadły do płaszczyzny $\boldsymbol{\alpha}$, to środek ***S*** takiej sfery jest równocześnie środkiem odcinka ***AB***. Gdy natomiast odcinek ***AB*** nie jest prostopadły do płaszczyzny $\boldsymbol{\alpha}$, środek ***S*** szukanej sfery jest punktem, w którym płaszczyzna $\boldsymbol{\mu}$ symetralna tego odcinka przecina prostą ***a/b*** przechodzącą przez punkt ***A/B*** zawarty w płaszczyźnie $\boldsymbol{\alpha}$ i prostopadłą do niej.

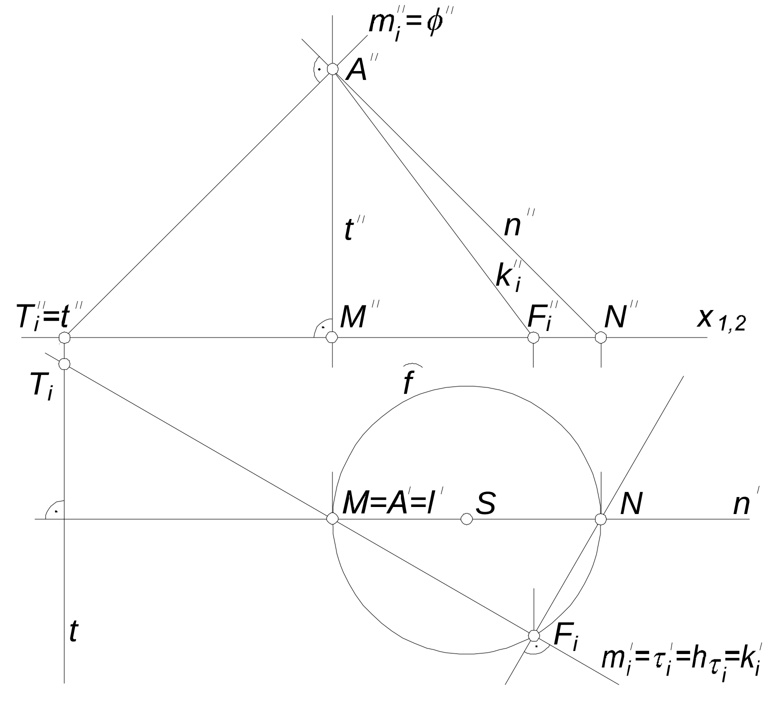
2.2. Prosta *AB* równoległa do płaszczyzny α

Przy założeniu, że odcinek ***AB*** jest równoległy do płaszczyzny $\boldsymbol{\alpha}$, m.g. punktów styczności sfer $\boldsymbol{\Omega_i}$ z tą płaszczyzną i zarazem przechodzących przez punkty końcowe rozważanego odcinka jest prosta ***t***, w której płaszczyzna $\boldsymbol{\mu}$ symetralna odcinka ***AB*** przecina płaszczyznę $\boldsymbol{\alpha}$. Dowolny punkt $\boldsymbol{T_i}$ prostej ***t*** oraz punkty ***A*** i ***B*** w sposób jednoznaczny określają podobnie jak w p.1.3. sferę zawierającą punkty ***A*** i ***B*** i styczną do prostej ***t*** w jej punkcie $\boldsymbol{T_i}$. Na rys.2 podano efektywną konstrukcję środków $\boldsymbol{S_i}$ takich sfer przy założeniu, że płaszczyzna $\boldsymbol{\mu}$ symetralna



Rys.2

odcinka $\boldsymbol{AB}$ jednoczy się z płaszczyzną rysunku. Przy tym założeniu płaszczyzna α prostopadła do płaszczyzny μ, przecina ją w prostej $\boldsymbol{t}$, która jest równocześnie jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę rysunku ($\boldsymbol{t=\alpha'}$). Rzuty prostokątne punktów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ jednoczą się z punktem $\boldsymbol{M}$ - środkiem odcinka $\boldsymbol{AB}$ ($\boldsymbol{M=A'=B'}$). Środki dowolnych sfer stycznych do prostej $\boldsymbol{t}$ (a tym samym do płaszczyzny α) w jej punktach $\boldsymbol{T_i}$ leżą na prostych $\boldsymbol{a_i}$ zawierających te punkty i prostopadłych do prostej $\boldsymbol{t}$, zaś środki sfer zawierających trzy niewspółliniowe punkty $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{T_i}$ znajdują się na prostych $\boldsymbol{s_i}$ będących m.g. punktów równoodległych od nich. Trójkąty $\boldsymbol{ABT_i}$ zawarte w płaszczyznach τ_i prostopadłych do płaszczyzny μ są trójkątami równoramiennymi o podstawie $\boldsymbol{AB=2a}$. Z tej symetrii wynika, że obydwie proste $\boldsymbol{a_i}$ i $\boldsymbol{s_i}$ leżą w płaszczyźnie rysunku. Tak więc środki $\boldsymbol{S_i}$ sfer Ω_i zawierających wierzchołki $\boldsymbol{ABT_i}$ i zarazem stycznych do prostej $\boldsymbol{t}$ w jej punktach $\boldsymbol{T_i}$ są punktami, w których proste $\boldsymbol{s_i}$ przechodzące przez środki $\boldsymbol{O_i}$ okręgów opisanych na tych trójkątach i prostopadłych do ich płaszczyzn, przecinają proste $\boldsymbol{a_i}$ przechodzące przez punkty $\boldsymbol{T_i}$ i prostopadłe do prostej $\boldsymbol{t}$ (rys.2).
Zbiorem tak skonstruowanych punktów $\boldsymbol{S_i}$ podobnie jak w p.1.3 jest parabola zawarta w płaszczyźnie rysunku (dowód przeprowadzono w p.1.3).
Warto zauważyć jeszcze, że płaszczyzny τ_i trójkątów $\boldsymbol{ABT_i}$ przecinają sfery Ω_i w okręgach o środkach $\boldsymbol{O_i}$ i promieniach $\boldsymbol{O_iT_i}$. Wynika stąd, że punkty $\boldsymbol{F_i}$ symetryczne do punktów $\boldsymbol{T_i}$ względem środków $\boldsymbol{O_i}$ rozważanych okręgów są drugimi punktami ograniczającymi ich średnice $\boldsymbol{T_iF_i}$. Stwierdzamy ponadto, że odcinki $\boldsymbol{S_iT_i}$ i $\boldsymbol{S_iF_i}$ są równe, ponieważ punkty $\boldsymbol{T_i}$ i $\boldsymbol{F_i}$ należą do tych samych sfer Ω_i, których środkami są punkty $\boldsymbol{S_i=a_i\cap s_i}$. Miejscem geometrycznym punktów $\boldsymbol{F_i}$ pęku prostych o wierzchołku $\boldsymbol{M}$, którego promienie przechodzą przez punkty $\boldsymbol{T_i}$ poruszające się po prostej $\boldsymbol{t}$, a odcinki $\boldsymbol{x_i}$ i $\boldsymbol{y_i}$ w nich zawarte pozostają w relacji $\boldsymbol{y_i^2+2x_iy_i=a^2}$ (gdzie $\boldsymbol{a}$ jest połową odcinka $\boldsymbol{AB}$) jest okrąg zawierający punkt $\boldsymbol{M}$. Relacja ta wynika stąd, iż promienie okręgów opisanych na $\boldsymbol{\Delta ABT_i}$ z jednej strony są sumą odcinków $\boldsymbol{x_i}$ i $\boldsymbol{y_i}$, zaś z drugiej strony ich kwadraty są równe sumie kwadratów odcinków $\boldsymbol{x_i}$ i $\boldsymbol{a}$, co wynika z trójkątów prostokątnych $\boldsymbol{AMO_i}$ (rys.2). Prawdziwość twierdzenia orzekającego, ze zbiorem punktów $\boldsymbol{F_i}$ jest okrąg wykażemy (pomijając dowody płaskie) metodą syntetyczną poprzez wyjście z płaszczyzny rysunku do przestrzeni. Przyjmijmy w tym celu, że płaszczyzna μ symetralna odcinka $\boldsymbol{AB}$ jest rzutnią pierwszą, a rzutnię drugą przyjęto prostopadle do prostej $\boldsymbol{t=\mu\cap\alpha}$ (rys.3). W płaszczyźnie φ określonej prostą $\boldsymbol{t}$ i punktem $\boldsymbol{A}$ znajduje się pęk prostych $\boldsymbol{A(m_i)}$, którego rzutem prostokątnym na rzutnię pierwszą jest pęk prostych $\boldsymbol{M(m_i')}$ perspektywiczny do pęku $\boldsymbol{A(m_i)}$. Homologiczne promienie $\boldsymbol{m_i}$ i $\boldsymbol{m_i'}$ tych pęków zawarte są w płaszczyznach τ_i pęku płaszczyzn o osi $\boldsymbol{l}$ łączącej wierzchołki $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{M}$ rozważanych pęków prostych. Przez wierzchołek pęku prostych $\boldsymbol{A(m_i)}$ prowadzimy płaszczyzny ν_i prostopadłe do promieni $\boldsymbol{m_i}$ tego pęku. Płaszczyzny te tworzą z ko-

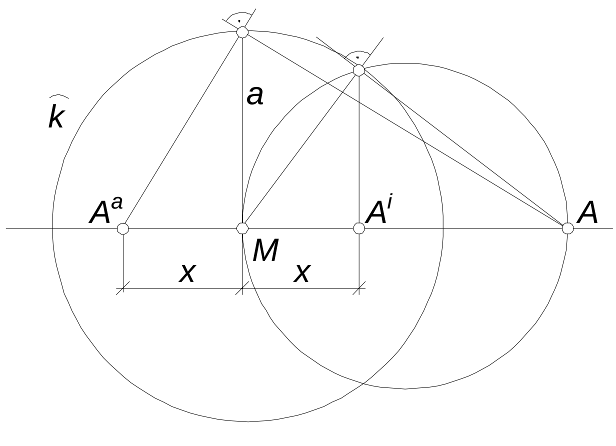


Rys. 3

lei drugi pęk płaszczyzn o osi $\boldsymbol{n}$ zawierającej punkt $\boldsymbol{A}$ i prostopadłej do płaszczyzny φ. Odpowiednie płaszczyzny tych dwóch pęków $\boldsymbol{l(\tau_i)}$ i $\boldsymbol{n(\nu_i)}$ są do siebie prostopadłe. Dwa rzutowe pęki płaszczyzn o osiach przecinających się generują powierzchnię stożkową stopnia drugiego. Przecinając te dwa rzutowe pęki płaszczyzn wzajemnie prostopadłych rzutnią pierwszą otrzymujemy na niej dwa rzutowe pęki prostych $\boldsymbol{M(h_{\tau i})}$ i $\boldsymbol{N(h_{\nu i})}$ o promieniach prostopadłych, których utworem jest okrąg (zawierający wierzchołki pęków) będący kierującą stożka normalnego do pęku prostych $\boldsymbol{A(m_i)}$. Na rys.3 wyznaczono rzuty jednej z tworzących tego stożka korespondującą z promieniem $\boldsymbol{m_i}$ pęku prostych $\boldsymbol{A(m_i)}$. Punkty $\boldsymbol{F_i}$ tego okręgu $\widehat{\boldsymbol{f}}$ są “ruchomymi” ogniskami paraboli będącej zbiorem środków $\boldsymbol{S_i}$ sfer $\boldsymbol{\Omega_i}$ ponieważ odcinki $\boldsymbol{S_iT_i}$ i $\boldsymbol{S_iF_i}$ dla każdego jej punktu są równe (parabola ta jest zbiorem punktów równoodległych od stałej prostej i stałego okręgu).

2.2.1. Antyinwersja na płaszczyźnie

Zauważoną w p.2.2 zależność między odcinkami $\boldsymbol{x_i}$ i $\boldsymbol{y_i}$ oraz połową długości odcinka $\boldsymbol{AB}$ ($\boldsymbol{y^2_i + 2x_iy_i = a^2}$) można również wyprowadzić z podobieństwa trójkątów prostokątnych $\boldsymbol{\Delta AMF_i}$ i $\boldsymbol{\Delta AMT_i}$ powstałych z podziału trójkąta prostokątnego $\boldsymbol{\Delta T_iAF_i}$ jego wysokością $\boldsymbol{AM}$. Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy proporcję $\boldsymbol{y_i : a = a:(2x_i + y_i)}$, a z niej relację $\boldsymbol{y^2_i + 2x_iy_i = a^2}$. Jeżeli w ustalonej proporcji za $\boldsymbol{y_i}$ i $\boldsymbol{2x_i + y_i}$ podstawimy odcinki $\boldsymbol{MF_i = y_i}$ i $\boldsymbol{MT_i = 2x_i + y_i}$, to z kolei otrzymamy proporcję $\boldsymbol{MF_i : a = a : MT_i}$ a z niej równość $\boldsymbol{MF_i \cdot MT_i = a^2}$. Z tej ostatniej postaci zapisu tego samego związku co poprzednio łatwo zauważyć, że punkty $\boldsymbol{F_i}$ są antyinwersyjnymi obrazami punktów $\boldsymbol{T_i}$ względem okręgu $\widehat{\boldsymbol{k}}$ o środku $\boldsymbol{M}$ i promieniu $\boldsymbol{a}$. Tak więc stwierdzamy, że rozważania nad zbiorami środków sfer spełniających określone warunki prowadzą do znanego w literaturze przekształcenia antyinwersyjnego płaszczyzny. Na rys.4 pokazano konstrukcję obrazu inwersyjnego $\boldsymbol{A^i}$ oraz obrazu antyinwersyjnego $\boldsymbol{A^a}$ tego samego punktu $\boldsymbol{A}$ względem okręgu $\widehat{\boldsymbol{k}}$ $\boldsymbol{(M,a)}$. Z konstrukcji tych obrazów oraz definicji przekształceń wynika, że odcinki $\boldsymbol{MA^i}$ i $\boldsymbol{MA^a}$ są równe, co jest konsekwencją relacji $\boldsymbol{a^2 = MA \cdot MA^i}$ dla inwersji oraz $\boldsymbol{a^2 = MA \cdot MA^a}$ dla antyinwersji. Z równości tych odcinków ($\boldsymbol{MA^i = MA^a}$) stwierdzamy że antyinwersja względem okręgu jest złożeniem inwersji względem tego okręgu i odbicia w jego średnicy. Antyinwersja jako iloczyn inwersji względem okręgu i odbicia w jego średnicy jest szczególnym przypadkiem inwolucji Möbiusa [2]. Spośród właściwości płaskiego przekształcenia antyinwersyjnego należy przypomnieć te, które będą użyteczne w dalszych rozważaniach. Antyinwersję na płaszczyźnie określa dowolny okrąg o ustalonym środku i promieniu. Środek okręgu antyinwersyjnego rozdziela parę punktów antyinwersyjnych (oryginał i obraz). Definicję okręgu rozszerzamy tak, aby można było włączyć prostą jako przypadek graniczny (specjalny) - to jest okrąg o promieniu nieskończonym. Przyjmując tak rozszerzoną definicję okręgu, można powiedzieć, że antyinwersja przekształca każdy okrąg na okrąg. Pojęcie płaszczyzny euklidesowej rozszerza się o pewien “idealny” punkt w nieskończoności $\boldsymbol{M^*}$ będący antyinwersyjnym obrazem punktu $\boldsymbol{M}$ - środka okręgu antyinwersyjnego.



Rys. 4

Tak pomyślany punkt M^* jest zarówno wspólnym punktem, jak i wspólnym środkiem linii prostych traktowanych jako okręgi o promieniu nieskończonym. Wszystkie proste przechodzące przez punkt M, jako okręgi ortogonalne z okręgiem antyinwersyjnym przecinają się w drugim punkcie M^* - obrazie antyinwersyjnym punktu M. Płaszczyznę euklidesową uzupełnioną punktem M^* nazywamy płaszczyzną antyinwersyjną (inwersyjną) lub konformiczną [2]. W ten sposób przekształcenie antyinwersyjne staje się w pełni wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością bez żadnych wyjątków. Dwa okręgi albo są styczne, albo przecinające się bądź nie posiadają punktu wspólnego. W tym ostatnim przypadku, gdy jeden okrąg leży całkowicie na zewnątrz drugiego lub jeden obejmuje drugi będziemy mówić, że okręgi te wymijają się wzajemnie [2]. Jeżeli okrąg/prosta zawiera środek okręgu antyinwersyjnego, to jego obrazem antyinwersyjnym względem tego okręgu jest prosta. Natomiast w przypadku, gdy okrąg/prosta nie zawiera środka okręgu antyinwersyjnego, to jego obrazem antyinwersyjnym jest zawsze okrąg. Z tych dwóch ostatnich właściwości wynika, iż obrazem antyinwersyjnym prostej nie zawierającej środka okręgu antyinwersyjnego względem tego okręgu jest okrąg przechodzący przez jego środek. Antyinwersja jest przekształceniem inwolucyjnym.

Wracając do udowodnionego w p. 2.2. twierdzenia orzekającego, że zbiorem punktów F_i (ruchomych ognisk) jest okrąg zawierający punkt M można teraz skonstatować, że okrąg ten jest antyinwersyjnym obrazem prostej t względem okręgu $\widehat{k}\,(M, a)$.

Konstrukcja średnicy okręgu $\widehat{f}$, a tym samym jego środka S sprowadza się do znalezienia obrazu antyinwersyjnego F_i punktu T_i prostej t zawartego w promieniu MT_i pęku prostych $M(m_i)$ prostopadłym do niej (rys.2). W p.3.3.3 niniejszej pracy wykażemy, ze środek S okręgu $\widehat{f}$ jest stałym ogniskiem paraboli będącej zbiorem środków S_i sfer Ω_i przechodzących przez punkty A i B i stycznych do płaszczyzny α, a prosta k równoległa do prostej t i przechodząca przez punkt K symetryczny do S względem wierzchołka P paraboli jest jej kierownicą.

2.3. Punkty *A* i *B* jednoczą się.

Jeżeli punkty A i B jednoczą się ze środkiem M odcinka AB i punkt ten nie leży w płaszczyźnie α, to zbiór środków S_i sfer Ω_i przechodzących przez punkt M i zarazem stycznych do płaszczyzny α, w każdej płaszczyźnie μ_i pęku płaszczyzn o osi l zawierającej ten punkt i prostopadłej do płaszczyzny α jest parabolą, dla której punkt M jest ogniskiem, a prosta $t_i = \alpha \cap \mu_i$ jej kierownicą. Te przystające parabole zawarte w płaszczyznach μ_i, o wspólnej osi l generują w przestrzeni paraboloidę obrotową o osi l, która jest zbiorem środków sfer przechodzących przez punkt i stycznych do płaszczyzny α. Gdy punkt M zawarty jest w płaszczyźnie α, to środki sfer stycznych do niej w tym punkcie leżą na prostej wychodzącej z tego punktu i prostopadłej do płaszczyzny α.

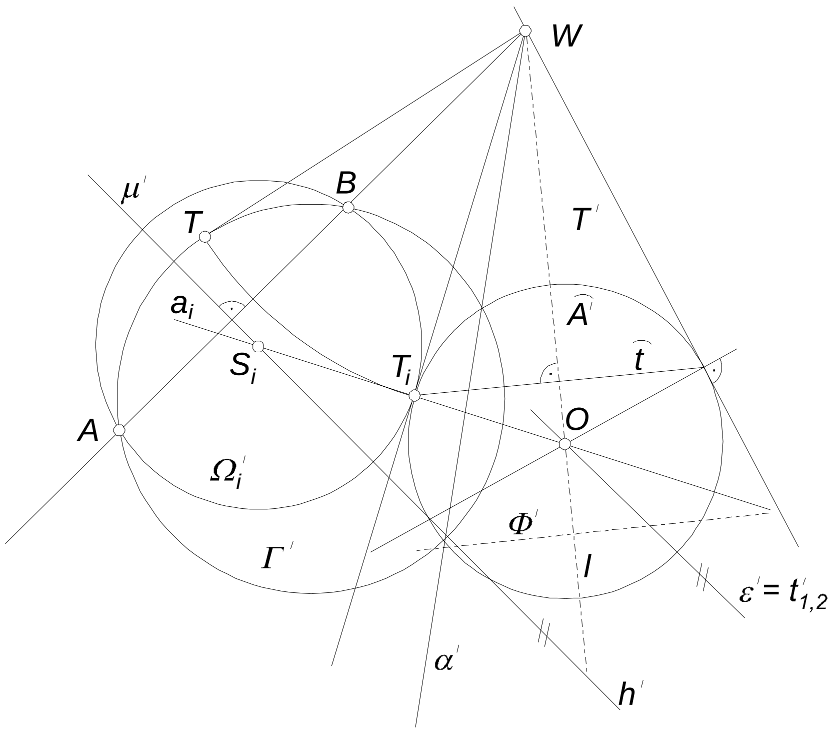
Reasumując rozważania p.2 stwierdzamy, ze zbiorami środków sfer, które przechodzą przez dwa różne bądź jednoczące się punkty i są równocześnie styczne do płaszczyzny mogą być punkt, prosta, okrąg, elipsa, parabola bądź paraboloida obrotowa, a m.g. ich punktów styczności z daną płaszczyzną odpowiednio okrąg, punkt, prosta i płaszczyzna.

3. Środki sfer stycznych do sfery i przechodzących przez dwa punkty

Rozważmy teraz przypadek, w którym miejsce płaszczyzny α zajmuje sfera $\widehat{A}$. Właściwości zbiorów środków S_i sfer Ω_i przechodzących przez dwa punkty A i B i zarazem stycznych do sfery $\widehat{A}$ zależą w tym przypadku od położenia prostej AB względem płaszczyzny potęgowej α danej sfery $\widehat{A}$ i sfery pomocniczej Γ zawierającej punkty A i B i przecinającej sferę $\widehat{A}$.

3.1. Prosta *AB* przebija płaszczyznę potęgową α

Przez dwa różne punkty ***A*** i ***B*** leżące po tej samej stronie sfery $\widehat{\boldsymbol{A}}$, z których żaden nie leży na niej, prowadzimy sferę pomocniczą $\boldsymbol{\Gamma}$ przecinającą sferę $\widehat{\boldsymbol{A}}$ w okręgu zawartym w płaszczyźnie potęgowej $\boldsymbol{\alpha}$ tych sfer (rys.5). Jeżeli prosta ***AB*** przebija płaszczyznę potęgową $\boldsymbol{\alpha}$ w pewnym punkcie ***W***, to długość odcinka ***WT*** każdej stycznej wychodzącej z tego punktu do dowolnej sfery zawierającej punkty ***A*** i ***B*** jest średnią geometryczną odcinków ***WA*** i ***WB***. Wynika stąd, iż m.g. punktów styczności sfer $\boldsymbol{\Omega_i}$ z daną sferą $\widehat{\boldsymbol{A}}$ jest okrąg $\widehat{\boldsymbol{t}}$ będący linią zetknięcia powierzchni stożkowej ***T*** o wierzchołku ***W***, opisanej na sferze $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Środki sfer stycznych do sfery $\widehat{\boldsymbol{A}}$ w punktach $\boldsymbol{T_i}$ okręgu $\widehat{\boldsymbol{t}}$ znaleźć się muszą na prostych $\boldsymbol{a_i}$ łączących punkty styczności $\boldsymbol{T_i}$ ze środkiem ***O*** sfery $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Proste te są tworzącymi tzw. powierzchni stożkowej normalnej $\boldsymbol{\Phi}$ (stożka normalnego) o wierzchołku ***O***, kierującej $\widehat{\boldsymbol{t}}$ i wspólnej osi ***l*** z powierzchnią stożkową ***T***. A ponieważ m.g. punktów równoodległych od dwu punktów ***A*** i ***B*** jest płaszczyzna $\boldsymbol{\mu}$ symetralna odcinka ***AB***, to wynika stąd, iż zbiorem środków $\boldsymbol{S_i}$ sfer $\boldsymbol{\Omega_i}$ przechodzących przez punkty ***A*** i ***B*** i zarazem stycznych do sfery $\widehat{\boldsymbol{A}}$ jest stożkowa, w której płaszczyzna $\boldsymbol{\mu}$ przecina stożek normalny $\boldsymbol{\Phi}$. Rodzaj tej stożkowej zależy od położenia odcinka ***AB*** względem sfery $\widehat{\boldsymbol{A}}$.



Rys. 5

Przykładowo jeżeli prosta ***AB*** jest styczna do sfery $\widehat{\boldsymbol{A}}$, a płaszczyzna sieczna $\boldsymbol{\mu}$ nie zawiera jej środka, to przekrojem stożka normalnego jest parabola. Prosta ***AB*** będąc styczną do sfery $\widehat{\boldsymbol{A}}$ jest jedną z tworzących powierzchni stożkowej ***T***, z którą koresponduje tworząca stożka normalnego $\boldsymbol{\Phi}$ do niej prostopadła. Do tej samej tworzącej jest prostopadła płaszczyzna sieczna $\boldsymbol{\mu}$, jako płaszczyzna symetralna odcinka ***AB***. Z prostopadłości płaszczyzny i prostej do tej samej prostej wynika równoległość płaszczyzny do prostej (bądź prostej do płaszczyzny). Tak więc płaszczyzna μ będąc równoległą do tworzącej stożka normalnego Φ przecina go w paraboli. Na rys. 5 płaszczyzna μ przecina stożek Φ w hiperboli ponieważ jest równoległa do dwóch jego tworzących zawartych w płaszczyźnie ε równoległej do płaszczyzny μ.

3.2. Punkt *A/B* jest punktem sfery $\widehat{A}$

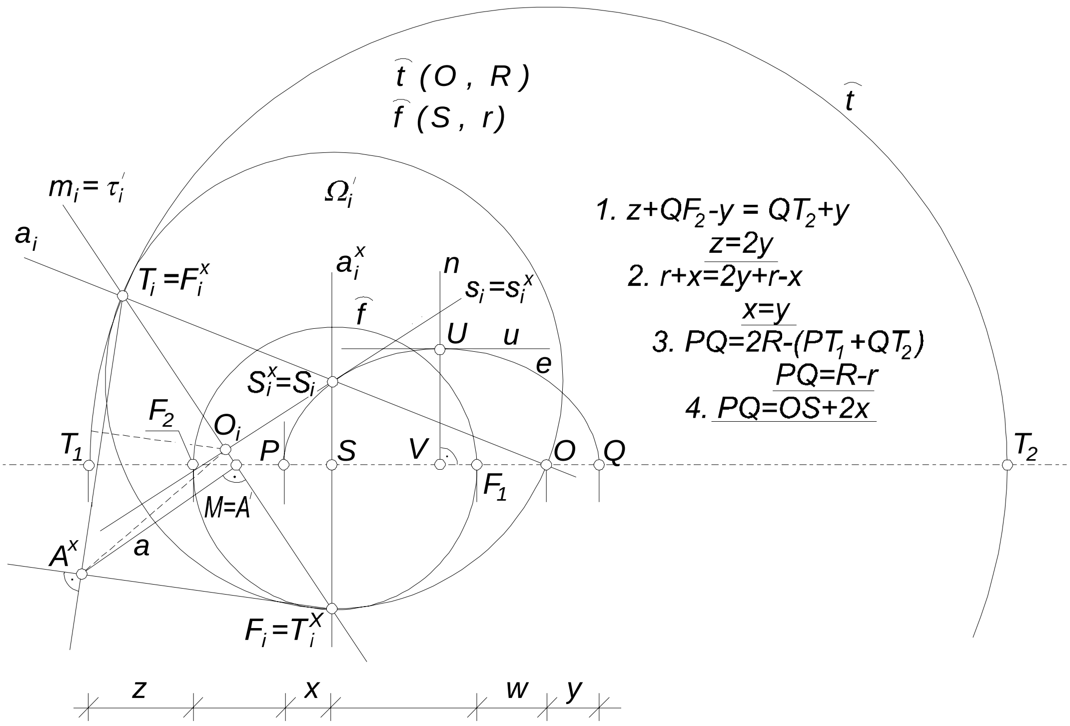
Jeżeli jeden z punktów końcowych odcinka ***AB*** leży na sferze $\widehat{A}$, to istnieje dokładnie jedna sfera Ω zawierająca te punkty i styczna do niej w punkcie ***A/B***. Gdy prosta ***AB*** przechodzi ponadto przez środek ***O*** sfery $\widehat{A}$, to środek ***S*** sfery Ω jednoczy się ze środkiem odcinka ***AB***. W przypadku gdy środek sfery $\widehat{A}$ nie jest współliniowy z punktami ***A*** i ***B***, to środek ***S*** sfery Ω jest punktem, w którym płaszczyzna symetralna odcinka ***AB*** przecina prostą łączącą środek ***O*** sfery $\widehat{A}$ z punktem ***A/B*** leżącym na niej.

3.3. Prosta *AB* równoległa do płaszczyzny potęgowej α

W przypadku równoległości odcinka ***AB*** do płaszczyzny potęgowej α sfer $\widehat{A}$ i Γ, m.g. punktów styczności sfer Ω_i przechodzących przez punkty ***A*** i ***B*** ze sferą $\widehat{A}$ jest okrąg $\widehat{t}$, w którym płaszczyzna μ symetralna tego odcinka przecina sferę $\widehat{A}$. Przy tych założeniach płaszczyzna μ zawiera środek ***O*** sfery $\widehat{A}$, a więc promień okręgu $\widehat{t}$ jest równy promieniowi tej sfery. Rozpatrywany odcinek ***AB*** może leżeć na zewnątrz sfery $\widehat{A}$, może być do niej styczny, albo leżeć wewnątrz niej zawierając jej środek bądź będąc niewspółliniowym z nim. W płaszczyźnie μ symetralnej odcinka ***AB***, którą będziemy utożsamiać z płaszczyzną rysunku, jego środek punkt ***M*** względem okręgu $\widehat{t}\,(O, R)$ będzie odpowiednio zewnętrznym punktem tego okręgu, leżącym na nim, bądź punktem wewnętrznym, który w tym przypadku może jednoczyć się z jego środkiem. Rozważania tych czterech przypadków będą ilustrowane rysunkami wykonanymi przy założeniu, że płaszczyzna rysunku jest płaszczyzną symetralną odcinka ***AB***.

3.3.1. Odcinek *AB* leży wewnątrz sfery $\widehat{A}$ i nie zawiera jej środka

Jeżeli odcinek ***AB*** równoległy do płaszczyzny potęgowej α, znajduje się wewnątrz sfery $\widehat{A}$ i jego środek ***M*** nie jednoczy się z jej środkiem, to w płaszczyźnie rysunku przyjmujemy okrąg $\widehat{t}(O, R)$ oraz punkt $M \neq O$ leżący wewnątrz tego okręgu. Rzuty prostokątne punktów ***A*** i ***B*** na płaszczyznę rysunku jednoczą się z punktem ***M*** (rys.6). Dowolny promień m_i pęku prostych $M\,(m_i)$ przecina okrąg $\widehat{t}$ w punktach T_i i T_i^*. Środki sfer stycznych do okręgu $\widehat{t}$, a tym samym do sfery $\widehat{A}$ w punktach T_i (te drugie punkty T_i^* w tej chwili nie są rozważane) leżą na prostych a_i łączących punkty styczności ze środkiem ***O*** tej sfery (tego okręgu). Natomiast m.g. punktów równo oddalonych od wierzchołków ΔABT_i są proste s_i przechodzące przez środki O_i okręgów opisanych na tych trójkątach i prostopadłe do ich płaszczyzn. Z symetrii ΔABT_i względem płaszczyzny rysunku wynika, ze proste s_i i a_i leżą na niej. Płaszczyzny symetralne odcinków AT_i/BT_i przecinają wysokości MT_i rozważanych trójkątów w punktach O_i, a płaszczyznę rysunku w prostych s_i zawierających punkty O_i i prostopadłych do wysokości MT_i tych trójkątów. Tak więc proste a_i i s_i przecinają się w punktach S_i będących środkami sfer Ω_i zawierających punkty ***A*** i ***B*** i równocześnie stycznych do sfery $\widehat{A}$. Na promieniach m_i pęków prostych $M(m_i)$, analogicznie jak w p.2.2, znajdują się punkty F_i symetryczne do punktów T_i względem środków O_i, które są drugimi punktami ograniczającymi średnice T_iF_i okręgów opisanych na ΔABT_i. Z podobieństwa ΔAMT_i i ΔAMF_i otrzymujemy proporcję $MT_i : a = a : MF_i$, a z niej równość $a^2 = MT_i \cdot MF_i$, z której wynika, że punkty F_i



Rys. 6

są antyinwersyjnymi obrazami punktów $\boldsymbol{T_i}$ względem okręgu $\widehat{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{(M,a)}$. Z właściwości antyinwersji omówionych w p.2.2.1, stwierdzamy, ze zbiorem punktów $\boldsymbol{F_i}$ w tym przypadku jest okrąg $\widehat{\boldsymbol{f}}$ nie zawierający punktu $\boldsymbol{M}$. Konstrukcja średnicy tego okręgu, a tym samym jego środka $\boldsymbol{S}$ sprowadza się do znalezienia antyinwersyjnych obrazów $\boldsymbol{F_i}$ (i=1,2) punktów $\boldsymbol{T_i}$ (i=1,2) okręgu $\widehat{\boldsymbol{t}}$ współliniowych z punktami $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{O}$, względem okręgu $\widehat{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{(M,a)}$.
Podobnie jak w p.2.2 prawdziwość tego twierdzenia można wykazać również za pomocą stożków normalnych o wspólnym wierzchołku i wysokości.
Przyjmując na rzutni pierwszej w miejsce prostej $\boldsymbol{t}$ okrąg $\widehat{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{(O,R)}$ nie zawierający punktu $\boldsymbol{M}$ otrzymamy zamiast pęku prostych $\boldsymbol{A(m_i)}$ stożek $\boldsymbol{T}$ o wierzchołku w punkcie $\boldsymbol{A}$ i kierującej w postaci przyjętego na rzutni pierwszej okręgu $\widehat{\boldsymbol{t}}$. Prowadząc przez wierzchołek tego stożka proste prostopadłe do jego tworzących otrzymamy powierzchnię stożkową $\boldsymbol{\Phi}$ o tym samym wierzchołku i wysokości, którą rzutnia pierwsza przecina w okręgu $\widehat{\boldsymbol{f}}$ będącym antyinwersyjnym obrazem okręgu $\widehat{\boldsymbol{t}}$ względem okręgu $\widehat{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{(M,a)}$.
Jeżeli okrąg $\widehat{\boldsymbol{t}}$ będzie zawierał środek $\boldsymbol{M}$ okręgu antyinwersyjnego, bądź będzie z nim współśrodkowy, to można udowodnić za pomocą stożków normalnych o wspólnym wierzchołku i wysokości, że jego obrazem antyinwersyjnym będzie prosta bądź okrąg współśrodkowy z okręgiem $\widehat{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{(M,a)}$.
Z przeprowadzonego dowodu twierdzenia w p.2.2. odnośnie do zbioru punktów $\boldsymbol{F_i}$, a także ze szkicu dowodu tego twierdzenia, stwierdzamy, ze antyinwersja na płaszczyźnie może być realizowana również za pomocą stożków normalnych o wspólnym wierzchołku i wspólnej wysokości.
Wracając do zasadniczego wątku przerwanego rozumowania zauważamy, ze okręgi $\widehat{\boldsymbol{t}}$ i $\widehat{\boldsymbol{f}}$ są wzajemnymi obrazami antyinwersyjnymi względem okręgu $\widehat{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{(M,a)}$ ponieważ przekształce-

nie to jest inwolucją. Jeżeli przyjmiemy, ze punkt $F_i = T_i^x$ to jego obraz antyinwersyjny F_i^x względem tego samego okręgu zjednoczy się z punktem T_i (rys.6).

Położenie środków O_i^x okręgów opisanych na ΔABT_i^x nie ulega zmianie, gdyż ΔAF_iT_i i $\Delta AF_i^xT_i^x$ są tożsame (przystające). Wynika stąd, że również proste s_i^x zjednoczą się z prostymi s_i . Natomiast środki sfer stycznych do okręgu $\widehat{f}$ znajdują się na prostych $a_i^x \neq a_i$ łączących punkty styczności $T_i^x = F_i$ ze środkiem S okręgu $\widehat{f}$. Z równości odcinków S_iT_i i S_iF_i oraz $S_i^xT_i^x$ i $S_i^xF_i^x$ wynika, że punkty S_i^x przecięcia się prostych a_i^x i $s_i^x = s_i$ jednoczą się z punktami S_i - środkami sfer Ω_i spełniającymi nałożone warunki.

Dla każdego punktu S_i tego zbioru odcinki S_iT_i i S_iF_i są równe, a więc punkty P i Q współliniowe z punktami O i S, takie że $PT_1 = PF_1$ i $QT_2 = QF_2$ należą do tego zbioru jako środki sfer stycznych do okręgu $\widehat{t}$ w punktach T_1 i T_2.

Z równości tych odcinków ($PT_1 = PF_1$ i $QT_2 = QF_2$) oraz wzajemnego położenia wymijających się okręgów $\widehat{t}\,(O,R)$ i $\widehat{f}\,(S,r)$ wynika równość odcinków SP i OQ, długość odcinka $PQ = R - r$, a także, że $PQ > OS$ (rys.6). Zauważamy ponadto, ze odcinki $OT_i = R$ są sumami odcinków OS_i i S_iT_i, a odcinki $S_iT_i = S_iF_i$ są z kolei sumami odcinków S_iS i $SF_i = r$. Z tych dwóch równości wynika równość trzecia, a mianowicie $OS_i + SS_i = R - r$. Trójkąty $\Delta T_iS_iF_i$ są trójkątami równoramiennymi, w których symetralne s_i boków T_iF_i są dwusiecznymi kątów przy wierzchołku S_i, a tym samym kątów przyległych do kąta $\angle SS_iO$. Wykazane właściwości zbioru punktów S_i są charakterystycznymi właściwościami elipsy. Tak więc udowodniono twierdzenie orzekające, ze zbiorem środków S_i sfer Ω_i zawierających punkty A i B (ograniczające odcinek AB) równoległy do płaszczyzny potęgowej α, i zarazem stycznych do sfery $\widehat{A}$ jest elipsa o długości osi dużej $PQ = R - r$, dla której punkty O i S (środki okręgów $\widehat{t}$ i $\widehat{f}$) są jej ogniskami, a proste s_i jej stycznymi w punktach S_i.

Warto dodać jeszcze, że promienie m_i pęku prostych $M(m_i)$ przecinają okrąg $\widehat{t}$ po raz drugi w punktach T_i^*. Analogicznie jak dla punktów T_i, środki S_i^* sfer Ω_i^* przechodzących przez te same punkty A i B i równocześnie stycznych do okręgu $\widehat{t}$, są punktami przecięcia prostych $a_i^* = T_i^*O$ z prostymi s_i^* przechodzącymi przez środki O_i^* okręgów opisanych na ΔABT_i^* i prostopadłych do ich płaszczyzn. Z prostopadłości prostych s_i i s_i^* do tych samych płaszczyzn τ_i zawierających ΔABT_i i ΔABT_i^* wynika równoległość tych prostych ($s_i // s_i^*$). Punkty styczności S_i i S_i^* stycznych s_i i s_i^* do elipsy i równoległych ograniczają jej średnicę. Jeżeli promień m_i pęku prostych $M(m_i)$ jest prostopadły do prostej OS, to dwusieczna u kąta przyległego do kąta $\angle OS_iS$ jest równoległa do prostej OS, a normalna n do niej w punkcie $S_i = U = n \cap u$ dzieli odcinek OS punktem V na pół. Odcinek $VU = VW$ jest połową długości osi małej rozważanej elipsy. Ze względu na przejrzystość rysunku nie zaznaczono na nim wszystkich opisanych elementów.

c.d.n.

LITERATURA:

[1]. Ż. ADAMAR: Elementarna geometria, cz.II, Stereometria, Uczpedgis, Moskwa 1951r

[2]. H. S. M. COXETER: Wstęp do geometrii dawnej i nowej, PWN, W-wa 1967r

[3]. D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN: Geometria poglądowa, PWN, W-wa 1956r

[4]. S. OCHOŃSKI : Stożkowe jako zbiory środków sfer przechodzących przez dwa punkty i stycznych do prostej płaszczyzny bądź sfery. Materiały Konferencji o Geometrii, Częstochowa, 24-25 września 1999r

CONICS AS SETS OF CENTERS OF SPHERES PASSING THROUGH TWO POINTS AND TANGENT TO THE STRAIGHT LINE, PLANE OR SPHERE

The paper presents results of studies on sets of centers of spheres containing two different points or common point, and at the same time tangent to the straight line, plane or sphere.

The studies proved that these sets are conics and in the case of spheres passing through point and tangent to the plane or sphere – surfaces of revolution in the form of sphere, ellipsoid, paraboloid and double-sheet hyperboloid. Well known definition of parabola, as a set of equally – distant points from fixed point and straight line, has been extended to the remaining nondegenerated conics via exchange straight line into circle. In this work was given also original general definition of nondegenerated conics as a set of equally – distant points from two fixed and coplanar reciprocally passing circles. Only one of these sets can be the straight line. It has been proved that two of these circles define anti-inversion and it could be realised on plane with orthogonal cones with common vertex and height. The results of these studies were also two algorithms of universal kinematic conic constructions which let us determine tangent line with its tangent point. Solutions of two exercises are given as ilustrating examples there.

Rec. dr inż. Janina GŁOMB