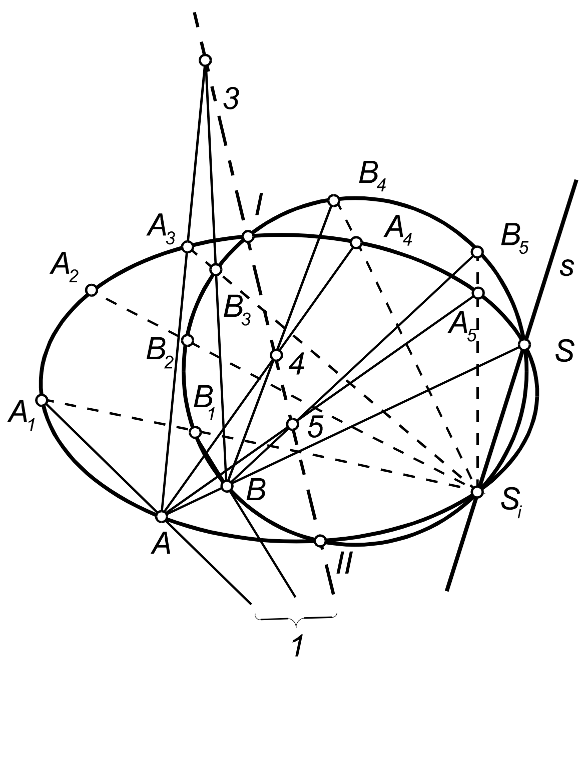
Marian PALEJ
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechnika Śląska

ANALIZA PEWNEJ WŁASNOŚCI PĘKU STOŻKOWYCH ŚCIŚLE STYCZNYCH

W pracy [1] przy omawianiu tworzenia krzywej rzędu trzeciego poprzez rzutowość pęku stożkowych z liniowym pękiem prostych ***(P)*** Autorzy dotykają problemu degeneracji tej krzywej przy szczególnie przyjętym środku ***P*** . Przedstawione przypadki rozpadu $\boldsymbol{c^3}$ nie są jednak kompletne. Brak m.in. omówienia takich założeń, w których baza pęku stożkowych ustala prostą wspólnie styczną lub okrąg styczny, tj. kiedy dwa lub trzy podstawowe punkty bazy ulegają zjednoczeniu, np. ***A*** = ***B***, ***C***, ***D*** lub ***A*** = ***B*** = ***C***, ***D***.

W artykule [2] omówiono przypadek, w którym baza pęku stożkowych zawiera jedną lub dwie styczne. Celem pracy niniejszej jest poszerzenie dyskusji na przypadek pęku stożkowych o wspólnie stycznym okręgu czyli o wspólnym okręgu krzywizny .W szczególności przyjmijmy następujące założenie. Niech bazę pęku krzywych stopnia drugiego tworzą trzy zjednoczone punkty ***A*** = ***B*** = ***C*** i różny od nich punkt ***D***. Przeprowadźmy analizę krzywej rzędu trzeciego utworzonej z punktów styczności do stożkowych pęku - takich promieni pęku liniowego ***(P)***, którego środek ***P*** leży na prostej wyznaczonej przez ***A*** = ***B*** = ***C*** tj. na wspólnej "trój punktowo" stycznej prostej ***a***.



rys. 1.

Na wstępie przypomnijmy twierdzenie o podstawowym dla dalszych rozważań znaczeniu. Cytujemy je z podręcznika [3] nie zmieniając archaicznego nieco języka:
"Jeśli przez każdy z dwóch wiadomych punktów wspólnych (***S*** i $\boldsymbol{S_i}$) dwóch danych, współpłaszczyznowych stożkowych przeprowadzimy po promieniu i połączymy prostą drugie punkty przez nie wyznaczone na każdej z obu stożkowych, to wszystkie tak wykreślone pary prostych spotykają się w punktach jednej i tej samej prostej; prosta ta przechodzi przez pozostałe dwa punkty wspólne obu stożkowych" .... /1/

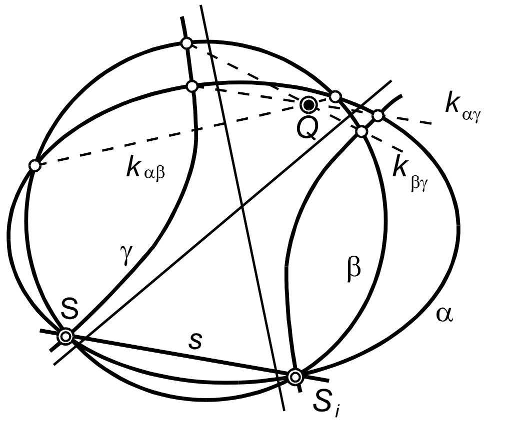
Przykład ilustrujący powyższą relację przedstawia rys.1.

Jednym z wniosków cytowanego twierdzenia przytoczonym również z [3] w dosłownej wersji jest relacja:
"Jeśli dowolne trzy współpłaszczyznowe stożkowe posiadają wszystkie trzy dwa wspólne punkty ***(S*** i $\boldsymbol{S_i}$ ***)***, to trzy pozostałe wspólne cięciwne przechodzą przez

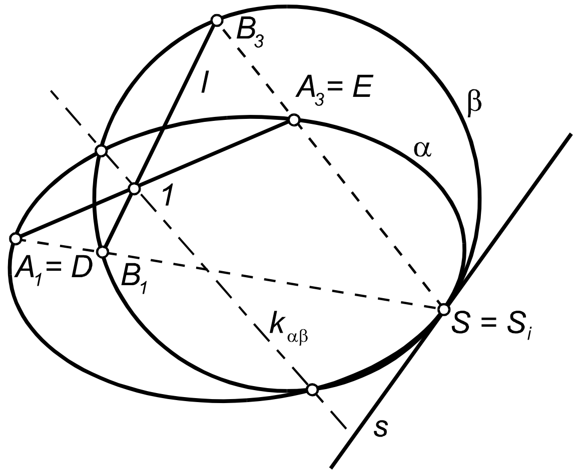
jeden punkt" (rys.2) .... /2/

Zarówno twierdzenie jak i wniosek jest oczywiście ważny także w przypadku kiedy punkty **S** i **S_i** ulegają zjednoczeniu tj. kiedy istnieje wspólna styczna i wspólny punkt styczności rozpatrywanych stożkowych. W rys.3 i następnych takie właśnie założenie jest podstawą prowadzonych rozważań.

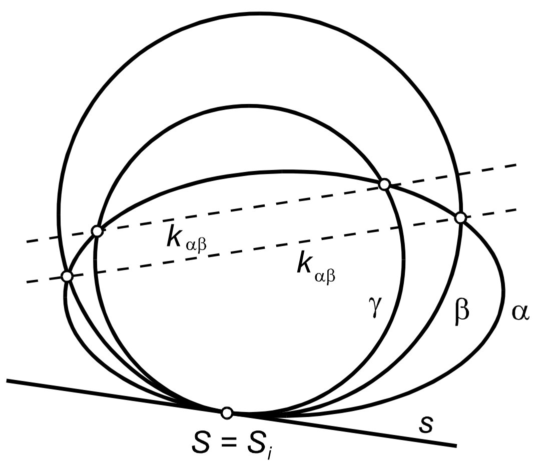
Zauważmy jeszcze, że w przypadku kiedy dwie spośród trzech stożkowych , o których mowa w wniosku /2/ są okręgami jedna z "cięciwnych" jest prostą niewłaściwą jako przechodzącą przez urojone punkty kołowe. Wynika stąd natychmiast, że pozostałe dwie są do siebie równoległe (rys.4).



Rys. 2.



rys. 3.

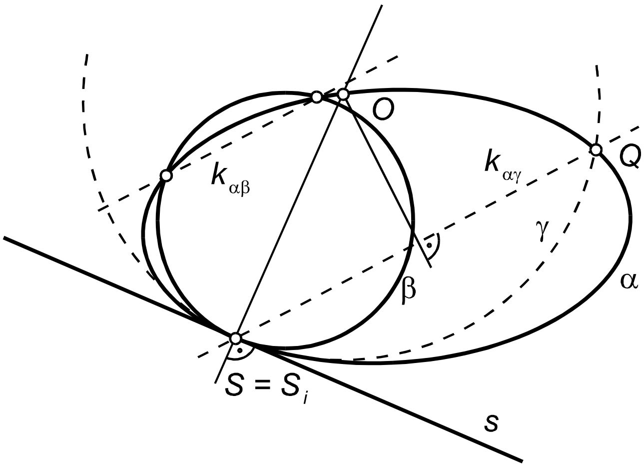


Rys. 4.

Fakt ten wykorzystamy w konstrukcji okręgu ściśle stycznego do stożkowej w dowolnym jej punkcie.

Niech dana będzie dowolna stożkowa α (rys.5) :
Aby wyznaczyć w wybranym punkcie **S** okrąg ściśle styczny do stożkowej α możemy kolejno:

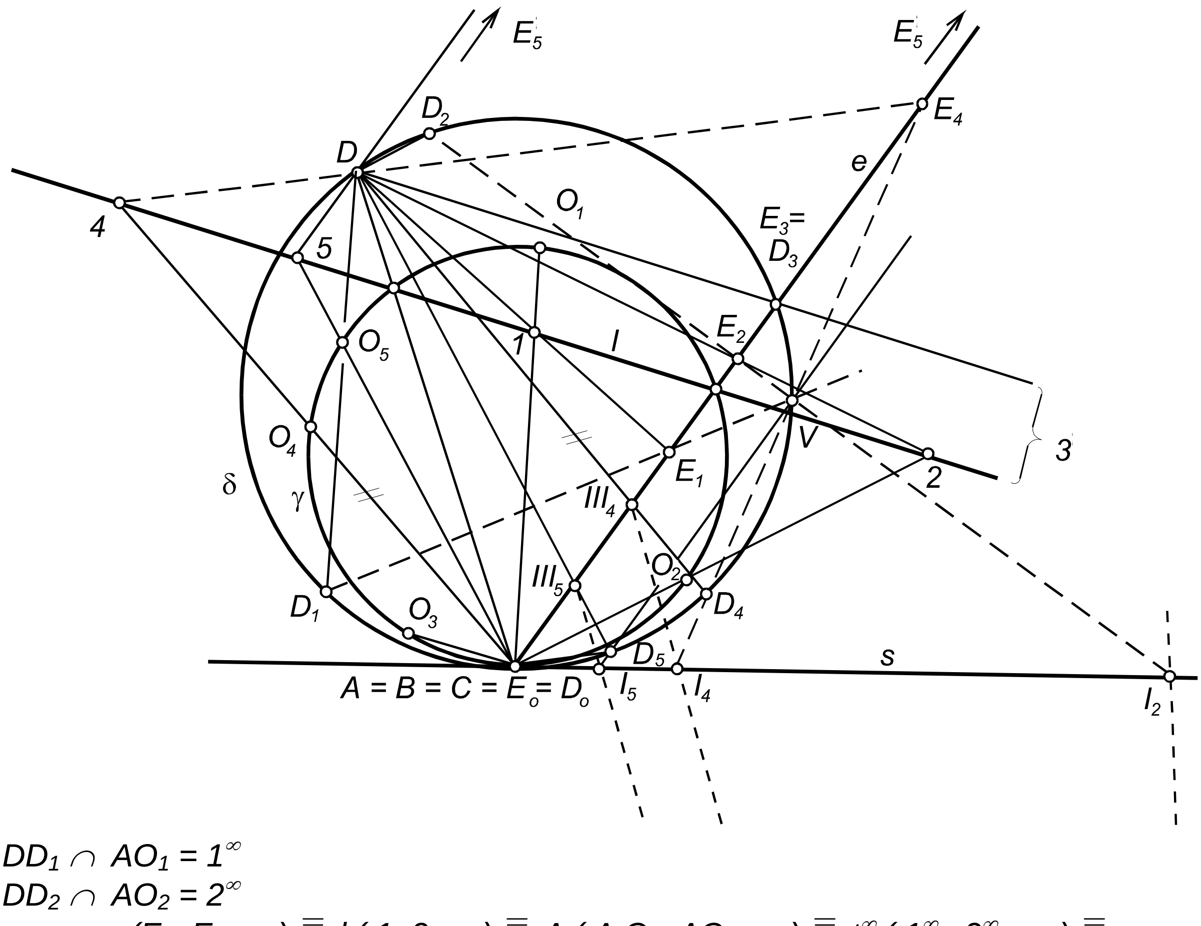
1/. skonstruować prostą **s** styczną do stożkowej α w punkcie **S**,
2/. obrać dowolny okrąg β styczny do prostej **s** (a jednocześnie i do stożkowej) w punkcie **S**,
3/. wyznaczyć wspólną, różną od **s** cięciwę okręgu β i stożkowej α - $k_{\alpha\beta}$
4/. poprowadzić przez punkt **S** prostą równoległą do $k_{\alpha\beta}$; tak skonstruowana prosta $k_{\alpha\gamma}$ może być uważana za cięciwę, która jest wspólna stożkowej α oraz pewnemu okręgowi γ stycznemu do α w punkcie **S**. Ponieważ jeden z końców naszej cięciwy jednoczy się z punktem **S** - wnosimy, że okrąg γ i stożkowa α posiadają z sobą jeden tylko różny od **S** punkt



rys. 5.

wspólny ***Q***. Warunek taki jednak może być spełniony jedynie wówczas kiedy okrąg γ jest ściśle styczny, a to oznacza, że rozwiązaniem naszej konstrukcji jest znalezienie okręgu γ o środku leżącym na normalnej do stożkowej w punkcie ***S*** i dwusiecznej odcinka ***QS***.

Korzystając z omówionych wyżej konstrukcji na rys.6 przedstawiono pęk stożkowych o bazie ***A = B = C***, ***D*** (piąte punkty precyzujące każdą kolejną stożkową pęku obrano na prostej przynależnej do ***A = B = C***, mamy więc kolejne stożkowe $\alpha_1 = (A,B,C,D,E_1)$, $\alpha_2 = (A,B,C,D,E_2)$, $\alpha_3 = (A,B,C,D,E_3)$, przy czym $e\,(E_1, E_2, E_3 \ldots) \in A$.



$$DD_1 \cap AO_1 = 1^{\infty}$$
$$DD_2 \cap AO_2 = 2^{\infty}$$
$$e\,(E_1, E_2, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\; l\,(1, 2, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\; A\,(A\,O_1, AO_2, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\; t^{\infty}(1^{\infty}, 2^{\infty}, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}$$
$$\overline{\overline{\wedge}}\; D\,(DD_1, DD_2, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\; \delta(D_1, D_2, \ldots)$$
$$\delta(D_1, D_2, \ldots) \overline{\wedge}\; e\,(E_1, E_2, \ldots)$$
$$\{D_i E_i\} = c^3\,;\; c^3 = (A) \cup (E_3) \cup (V) \;\rightarrow\; s\,(I_1, I_2, \ldots) \overline{\wedge}\; e\,(III_1, III_2, \ldots)$$

rys. 6

W założeniach przyjęto jako dane: punkt $A = B = C$, styczną w tym punkcie - prostą s, okrąg styczności γ oraz punkt D. Rzutując na okrąg γ z środka A - punkt D oraz punkty E_i otrzymujemy z połączenia tych rzutów prostą l. Proste DE_i wycinają na prostej l szereg punktów: ***1, 2, 3., ... ,*** które wraz z punktem $A = B = C$ ustalają cięciwy wspólne okręgowi krzywizny γ oraz poszczególnym stożkowym pęku (por konstr. na rys.1). Tak więc punkty O_i są punktami przecięcia stożkowych pęku z okręgiem styczności.

Rozważmy pomocniczy okrąg δ styczny do stożkowych, a więc i do prostej s w punkcie $A = B = C$ oraz przechodzący przez punkt D. Wiadomo, że każda stożkowa pęku będzie miała równoległe do siebie cięciwy wspólne z okręgami γ i δ. Oznacza to, że jeżeli przez punkt D poprowadzimy prostą równoległą np. do AO_4 to będzie to cięciwa wspólna okręgu δ z stożkową $ABCDE_4$ i co za tym idzie - że punkt przecięcia tą równoległą okręgu δ jest kolejnym punktem D_4 tej stożkowej.

Zmierzamy do tego aby ustalić czy i jakie własności posiada szereg punktów E_i o podstawie $e \in A = B = C$. Gdyby w naszym przypadku zachodziła sytuacja analogiczna do tej jaką obserwowaliśmy w pękach, których bazy zawierały jedną lub dwie pary zjednoczonych elementów, wówczas styczne do stożkowych pęku (pęku, którego baza zawiera trzy zjednoczone elementy) - poprowadzone w punktach E_i przecinałyby się w jednym punkcie. Intuicyjnie wyczuwana taka sytuacja wymaga jednak ścisłego dowodu. Szukając go wprowadźmy jeszcze pomocniczy szereg punktów niewłaściwych $1^{\infty}, 2^{\infty}, 3^{\infty} \dots$, w których przecinają się odpowiednio równoległe proste DD_1 i AO_1, następnie DD_2 i AO_2 itp.

Otrzymujemy następujące relacje:

$e\,(E_1, E_2 \dots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; l\,(1, 2 \dots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; A\,(AO_1, AO_2, \dots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; t^{\infty}(1^{\infty}, 2^{\infty}, \dots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; D\,(DD_1, DD_2, \dots)$
$\overline{\overline{\wedge}}\; \delta\,(D_1, D_2, \dots)$ .... /3/

$\delta\,(D_1, D_2, \dots) \;\overline{\wedge}\; e\,(E_1, E_{.2} \dots)$ .... /4/

Utwór powstały z łączenia odpowiadających sobie elementów w dwóch rzutowych szeregach: stopnia drugiego i pierwszego jest krzywą rzędu trzeciego. Tak więc zbiór prostych D_iE_i winien powłóczyć krzywą rzędu trzeciego. Zauważmy jednak, że w zbiorze tym istnieją dwa pęki prostych: jeden o wierzchołku $A = B = C$ i drugi o wierzchołku $E_3 = D_3$. Wynika stąd, że nasza krzywa degeneruje się do trzech pęków, czyli, że wyznaczane przez punkty D_i i E_i proste przecinają się w jednym punkcie. W rys.6 środkiem pęku tych prostych jest punkt V.

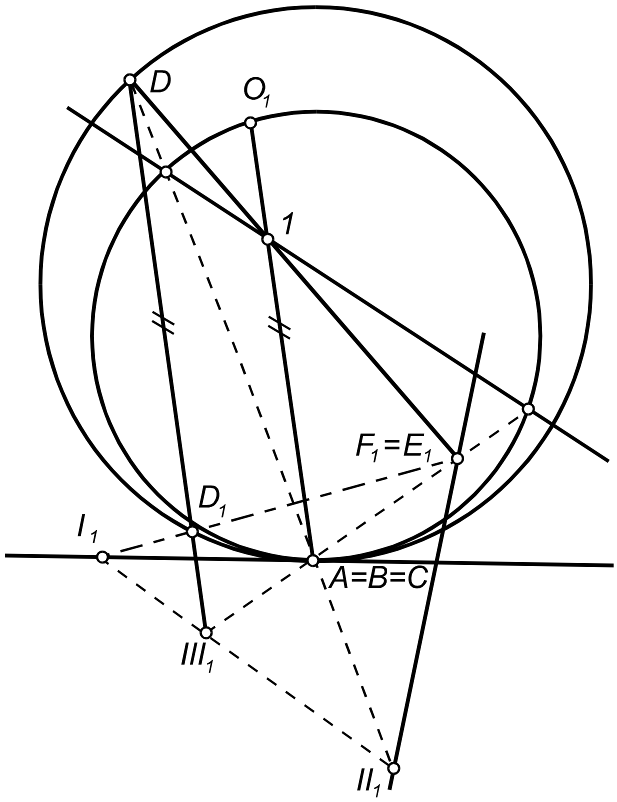
Po ustaleniu powyższych relacji wróćmy do zagadnienia stycznych do stożkowych rozpatrywanego pęku w punktach E_i. W tym celu na osobnym rysunku (7) rozważmy konstrukcję wyznaczenia stycznej w punkcie E_1 do stożkowej określonej punktami $A = B, D, D_1, E_1, F_1$. Szukając stycznej E_1, F_1 posłużymy się twierdzeniem Pascala, z którego wynika, że prostą Pascala wyznaczają punkty $I_1 = AB \cap D_1E_1$ i $III_1 = DD_1 \cap F_1A$ Punkt przecięcia prostej $I_1\, III_1$ z prostą BD jest elementem szukanej stycznej $E_1 F_1$.

Wracając do rysunku 6 stwierdzamy, że:

$s\,(I_1\, I_2, \dots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; V\,(E_1D_1, E_2D_2, \dots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; e\,(E_1, E_2, \dots)$ .... /5/
$e\,(III_1, III_2, \dots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; D\,(DD_1, DD_2, \dots) \;\overline{\wedge}\; e\,(E_1, E_2, \dots)$ .... /6/

skąd wynika rzutowość szeregów:

$s\,(I_1, I_2, \dots) \;\overline{\wedge}\; e\,(III_1, III_2, \dots)$ .... /7/



$$ABDD_1E_1F_1 = \alpha_1$$

$$E_1F_1 = ?$$

$$AB \cap D_1E_1 = I_1$$

$$BD \cap E_1F_1 = II_1$$

$$DD_1 \cap F_1A = III_1$$

rys. 7.

Ponieważ jednocześnie do zbioru prostych łączących odpowiadające sobie elementy obydwu szeregów należy pęk o środku $\boldsymbol{A = I_o = III_o}$ - proste tego zbioru tworzą pęk liniowy. Stwierdzamy zatem, że proste Pascala wynikające z rozważań kolejnych stożkowych pęku o wspólnym okręgu styczności przecinają się w jednym punkcie. Jeżeli uwzględnimy, że jedna z tych prostych pokrywa się z prostą ***BD*** jako zniekształconą stożkową pęku, wnioskujemy natychmiast, że punkt taki leży na ***BD***. Ponieważ jednak, jak to wynika z rys.7 punkt przecięcia prostych Pascala z prostą ***BD*** jest elementem stycznej do stożkowej w punkcie ***E*** - udowodniliśmy następujące twierdzenie:
stożkowe pęku, którego baza zawiera trzy zjednoczone punkty podstawowe **A = B = C** *oraz różny od nich punkt* **D** *mają tę własność, że styczne do nich w każdym punkcie szeregu, o podstawie przechodzącej przez* **A = B = C** *przecinają się w jednym punkcie* ***W***; *punkt* ***W*** *leży na prostej* ***AD***.

LITERATURA:

[1]. A.S.Smogorżewskij, J.S.Stołowa - "Sprawocznik po tieorii płoskich kriwych trietiowo poriadka " - Gosudarstwiennoje Izdatielstwo Fiziko-Matiematiczeskoj Litieratury, Moskwa, 1961.

[2]. M.Palej: "O pewnej konstrukcji uzupełniającej stożkowe pasma i pęku" - Biuletyn Polskiego Towarzystwa Geometrii i Grafiki Inżynierskiej, Gliwice,1998.

[3]. A.Lewenberg: "Geometrya rzutowa tworów pierwiastkowych", Warszawa, 1902 - Druk. J.Sikorskiego.

ANALYSIS OF A PROPERTY OF AN OSCULATORY CONICS PENCIL

The paper considers a pencil of conics, which basis is formed in such a way that three fundamental points coincide. By means of projective connections the following theorem has been proved:
"if the basis of a pencil of conics includes three coinciding, fundamental points, e. g., $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, and a different from them point $\boldsymbol{D}$, then the range of points with a basis $\boldsymbol{q}$ passing through $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ has such a property, that all the tangents to the pencil's conics in points of $\boldsymbol{q}$ pass through a single point $\boldsymbol{W}$; the point $\boldsymbol{W}$ lies on the straight line $\boldsymbol{AD}$".