

## KONFIGURACYJNY CHARAKTER METODY MONGE'A

### 1. Wstęp.

W podręcznikach geometrii wykreślnej spotykamy dwa różne podejścia do metody rzutów prostokątnych na dwie rzutnie (Monge'a), t.zw. metodę śladową i bezśladową. Autorzy zwykle preferują jedną z nich, czasem nawet zdecydowanie odrzucając drugą. Istnieje pewna dziedzina zastosowań obu metod i wtedy dyskusja nad efektywnością, zaletami poszczególnych metod jest racjonalna. Ale są też obszary, gdzie metoda śladowa nie może być (z natury rzeczy) zastosowana i wówczas tego typu dyskusja staje się bezprzedmiotowa. W pracy niniejszej wykazuje się, że owo stwierdzenie ma głębszy sens geometryczny. Okazuje się bowiem, że u podstaw obu metod leżą dwie różne konfiguracje geometryczne. W metodzie Monge'a podstawowymi konstrukcjami są t.zw. konstrukcje przynależności i elementów wspólnych. Konstrukcja elementów wspólnych na płaszczyźnie danej śladami (podobnie jak konstrukcja cienia odcinka na dwie rzutnie) prowadzi do pewnej konfiguracji, nazwanej konfiguracją Monge'a ([2],[4],[6]). Konstrukcja elementów wspólnych (punktu przecięcia się dwu prostych) na płaszczyźnie określonej za pomocą dwu prostych (bezśladowo) prowadzi do konfiguracji dualnej do konfiguracji związanej z czworokątową szóstką punktów, wprowadzoną przez Veblena-Younga ([1],[5]). Obie konfiguracje zamykają się na płaszczyźnie, na której spełniony jest aksjomat Desargues'a.

### 2. Konfiguracja Veblena-Younga.

*Czworokątem* nazywamy uporządkowaną czwórkę punktów trójkami niewspółliniowych. Poszczególne punkty takiej czwórki nazywamy *wierzchołkami*. Proste incydujące z dwoma wierzchołkami nazywamy *bokami*. Boki czworokąta porządkujemy w następujący sposób: niech  $p_1 p_2 p_3 p_4$  będzie czworokątem, wówczas  $p_1 p_4 \mid P_1$ ,  $p_2 p_4 \mid P_2$ ,  $p_3 p_4 \mid P_3$ ,  $p_2 p_3 \mid P_4$ ,  $p_1 p_3 \mid P_5$ ,  $p_1 p_2 \mid P_6$ . Boki  $P_1, P_2, P_3$  nazywamy *trójką gwiazdzistą*, a boki  $P_4, P_5, P_6$  *trójką trójkątową*. Przecięcia boków czworokąta nie będące wierzchołkami nazywamy *punktami przekątniowymi*. Konfigurację (podstrukturę płaszczyzny rzutowej) złożoną z wierzchołków i boków czworokąta nazywamy *czworokątem zupełnym*. Mówimy, że punkty  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  tworzą czworokątową szóstkę

punktów, którą oznaczamy symbolicznie  $\begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje czworokąt

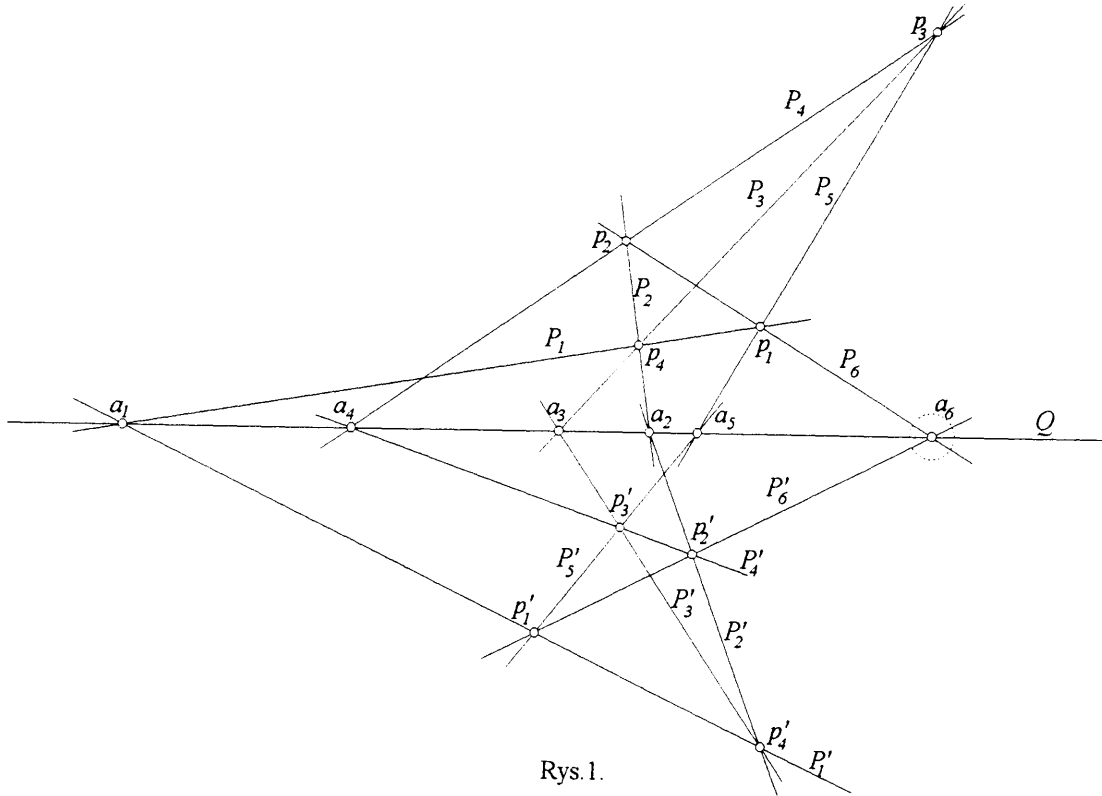
$p_1 p_2 p_3 p_4$ , o bokach  $P_1, \dots, P_6$  oraz prosta  $Q$  takie, że  $\bigwedge_{i=1}^4 p_i \neg \mid Q$ ,  $\bigwedge_{i=1}^6 a_i \mid P_i Q$ .

O czworokącie  $p_1 p_2 p_3 p_4$  będziemy mówili, że realizuje czworokątową szóstkę punktów  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ . Czworokątowa szóstka punktów spełnia własności

$$\{i,j,k\}=\{1,2,3\} \wedge \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_i & a_{i+3} \\ a_j & a_{j+3} \\ a_k & a_{k+3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_4 & a_1 \\ a_5 & a_2 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix}.$$

Pierwszą implikację realizuje czworokąt  $p_i p_j p_k p_4$ , drugą czworokąt  $p_2 p_1 p_4 p_3$ .



Rys. 1.

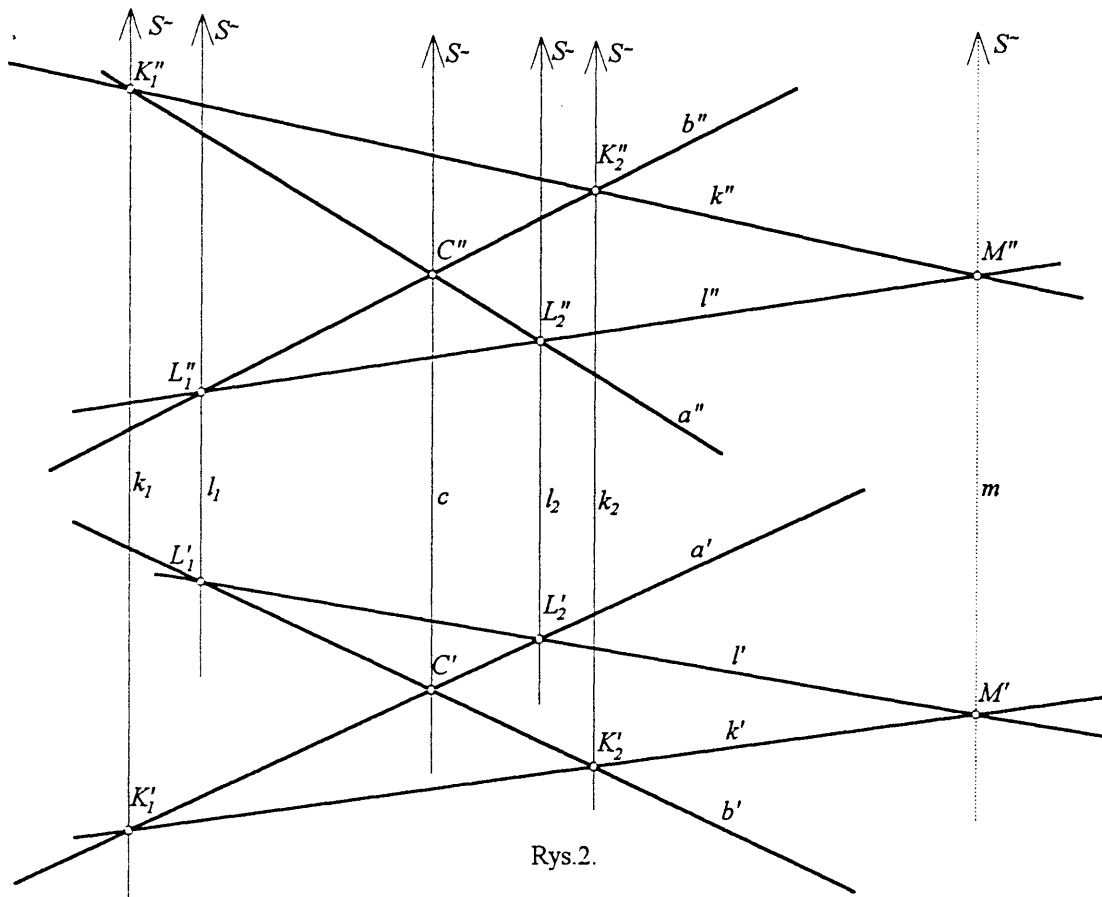
Okazuje się, że dla piątki punktów  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  istnieje dokładnie jeden punkt  $a_6$  taki,

że  $\begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix}$ . Udowodnijmy to. W tym celu dla danej konfiguracji  $p_1 p_2 p_3 p_4, P_1, \dots, P_6, Q,$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  rozważmy konfigurację  $p'_1 p'_2 p'_3 p'_4, P'_1, \dots, P'_5, Q, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  (Rys.1). Wystarczy wykazać, że prosta  $P'_6 (p'_1 p'_2)$  incyduje z punktem  $a_6$ . Trójkąty  $p_1 p_3 p_4, p'_1 p'_3 p'_4$  są osiowo perspektywiczne o osi  $Q$ , zatem na mocy aksjomatu Desargues'a proste  $p_1 p'_1, p_3 p'_3, p_4 p'_4$  należą do jednego pęku. Oznaczmy wierzchołek tego pęku przez  $o$ . Podobnie trójkąty  $p_2 p_3 p_4, p'_2 p'_3 p'_4$  są osiowo perspektywiczne o osi  $Q$ , zatem na mocy aksjomatu Desargues'a proste  $p_2 p'_2, p_3 p'_3, p_4 p'_4$  należą do jednego pęku. Wierzchołkiem tego pęku jest pewien punkt  $o$ . Stąd wnosimy, że czworokąty  $p_1 p_2 p_3 p_4, p'_1 p'_2 p'_3 p'_4$  są perspektywiczne o osi  $Q$ . Zatem boki  $P_6 (p_1 p_2), P'_6 (p'_1 p'_2)$  przecinają się na prostej  $Q$  w punkcie  $a_6$ .

W dowodzie powyższym użyliśmy konfiguracji 14 punktów:  $p_1, \dots, p_4, p'_1, \dots, p'_4, a_1, \dots, a_6$ ; 13 prostych:  $Q, P_1, \dots, P_6, P'_1, \dots, P'_6$  takich, że dla  $\neq(i,j,k)$  zachodzi  $\neg$

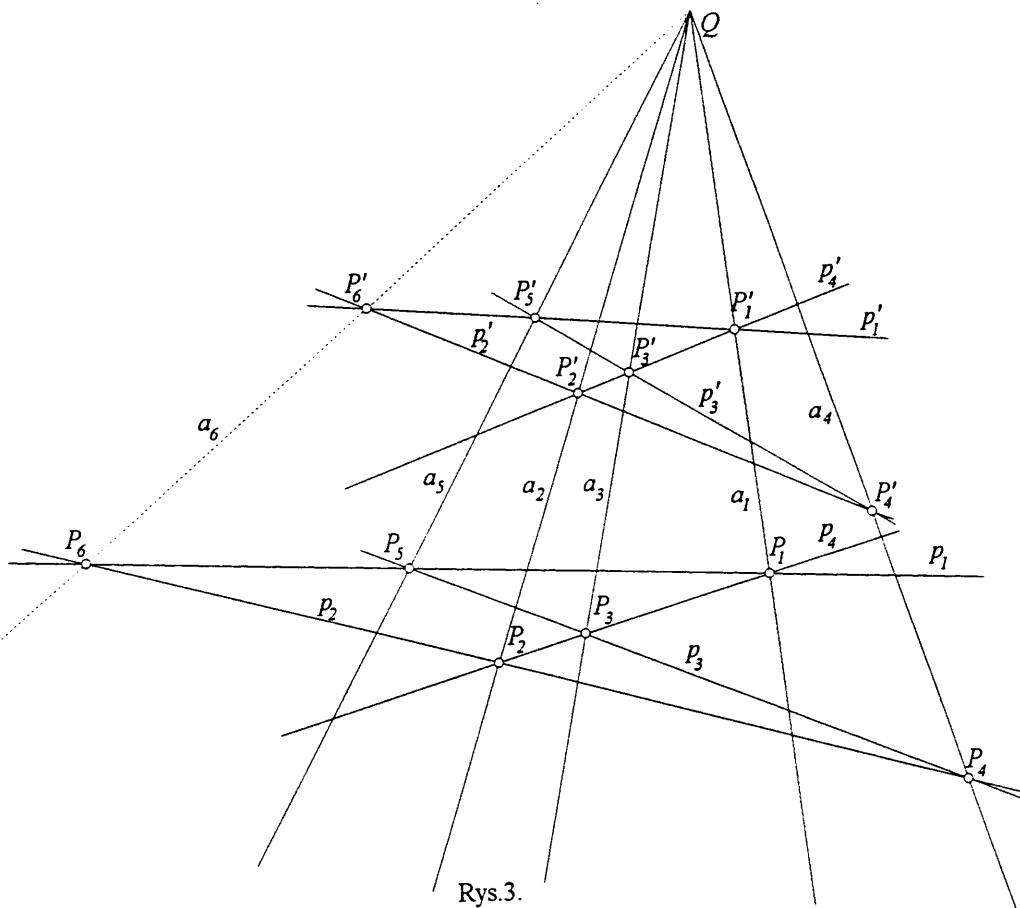
$L(p_i p_j p_k) \wedge \neg L(p'_i p'_j p'_k)$  oraz  $\bigwedge_{i=1}^4 p_i \neg | Q, \bigwedge_{i=1}^6 a_i | P_i Q, \bigwedge_{i=1}^4 p'_i \neg | Q, \bigwedge_{i=1}^6 a'_i | P'_i Q$ .  
 Konfigurację tę nazywać będziemy *konfiguracją Veblena-Younga* i oznaczać w skrócie V-Y.  
 Nazwa ta została użyta prawdopodobnie pierwszy raz w niniejszej pracy.



### 3. Zasada przynależności w metodzie Monge'a.

Założmy, że na płaszczyźnie rysunku, w bezśladowej metodzie Monge'a odwzorowana jest płaszczyzna  $\alpha(a, b)$ , gdzie  $a=(a', a'')$ ,  $b=(b', b'')$ ,  $a \cap b = \{C\}$ , czyli  $a' \cap b' = \{C'\}$ ,  $a'' \cap b'' = \{C''\}$  i prosta  $C'C''$  ma kierunek pionowy (dowolny, ustalony kierunek  $S^\infty$  na rzutni przyjęty jako pionowy), co w zapisie za pomocą symboli incydencji " $|$ " i współliniowości oznacza  $a'b' | C'$ ,  $a''b'' | C''$ ,  $L(C'C''S^\infty)$  (Rys.2). Jeśli teraz, stosując zasadę przynależności (rzut punktu danej figury należy do rzutu tej figury), przyjmujemy na prostych  $a'$ ,  $a''$ ,  $b'$ ,  $b''$  odpowiednio punkty  $K'_1, L'_2, L'_1, K'_2, K''_1, L''_2, L''_1, K''_2$  tak, że  $K'_1 L'_2 | a'$ ,  $L'_1 K'_2 | b'$ ,  $K''_1 L''_2 | a''$ ,  $L''_1 K''_2 | b''$ ,  $L(K'_1 K''_1 S^\infty)$ ,  $L(L'_1 L''_1 S^\infty)$ ,  $L(K'_2 K''_2 S^\infty)$ ,  $L(L'_2 L''_2 S^\infty)$ , to punkty  $M', M''$  przecięcia się odpowiednio prostych  $l'$  ( $L'_1 L'_2$ ),  $k'$  ( $K'_1 K'_2$ ) i prostych  $l''$  ( $L''_1 L''_2$ ),  $k''$  ( $K''_1 K''_2$ ):  $k' \cap l' = \{M'\}$ ,  $k'' \cap l'' = \{M''\}$  (w symbolice incydencji  $M' | k'l'$ ,  $M'' | k''l''$ ) spełniają warunek  $L(M'M''S^\infty)$ . Jeśli proste wyznaczone przez pary punktów  $(K'_1, K''_1)$ ,  $(L'_1, L''_1)$ ,  $(K'_2, K''_2)$ ,  $(L'_2, L''_2)$ ,  $(C', C'')$ ,  $(M', M'')$  oznaczymy odpowiednio przez  $k_1, l_1, k_2, l_2, c, m$ , to otrzymujemy konfigurację 13 punktów:  $K'_1, K''_1, L'_1, L''_1, K'_2, K''_2, L'_2, L''_2, C', C'', M', M'', S^\infty$  oraz 14 prostych:  $a', a'', b', b'', k', k'', l', l'', k_1, l_1, k_2, l_2, c, m$  spełniających, oprócz zapisanych powyżej, dodatkowo następujące incydencje:  $K'_1 K''_1 | k_1$ ,  $L'_1 L''_1 | l_1$ ,  $K'_2 K''_2 | k_2$ ,  $L'_2 L''_2 | l_2$ ,  $C'C'' | c$ ,  $M'M'' | m$ . Konfigurację tę nazywać będziemy *konfiguracją bezśladową Monge'a* i oznaczać w skrócie przez BM. Rzutową postać tej konfiguracji przedstawia rysunek 3. Oznaczmy przez DV-Y konfigurację

dualną do konfiguracji V-Y. Okazuje się, że konfiguracje BM i DV-Y są izomorficzne. Izomorfizm ten (a raczej odpowiedniość korelacyjną między BM i V-Y) ustalają tabelki Tab1, Tab2. Tę samą odpowiedniość ustalają rysunki 1 i 3, przy czym odmiennie oznaczone są punkty i proste na tych rysunkach. Na rysunku 1 punkty są oznaczone małymi literami, proste - wielkimi literami alfabetu łacińskiego, na rysunku 3 - odwrotnie. Odnośnie oznaczeń dodajmy, że na rysunku 2 zgodnie z tradycją, punkty są oznaczone wielkimi literami a proste małymi literami. Do oznaczeń na rysunkach adekwatne są oznaczenia w tekście.



Rys.3.

BM	V-Y
$k'$	$p_1$
$l'$	$p_2$
$a'$	$p_3$
$b'$	$p_4$

BM	V-Y
$l_1$	$a_2$
$l_2$	$a_4$
$k_1$	$a_5$
$k$	$a_1$
$c$	$a_3$
$m$	$a_6$

BM	V-Y
$k''$	$p'_1$
$l''$	$p'_2$
$a''$	$p'_3$
$b''$	$p'_4$

Tab.1.

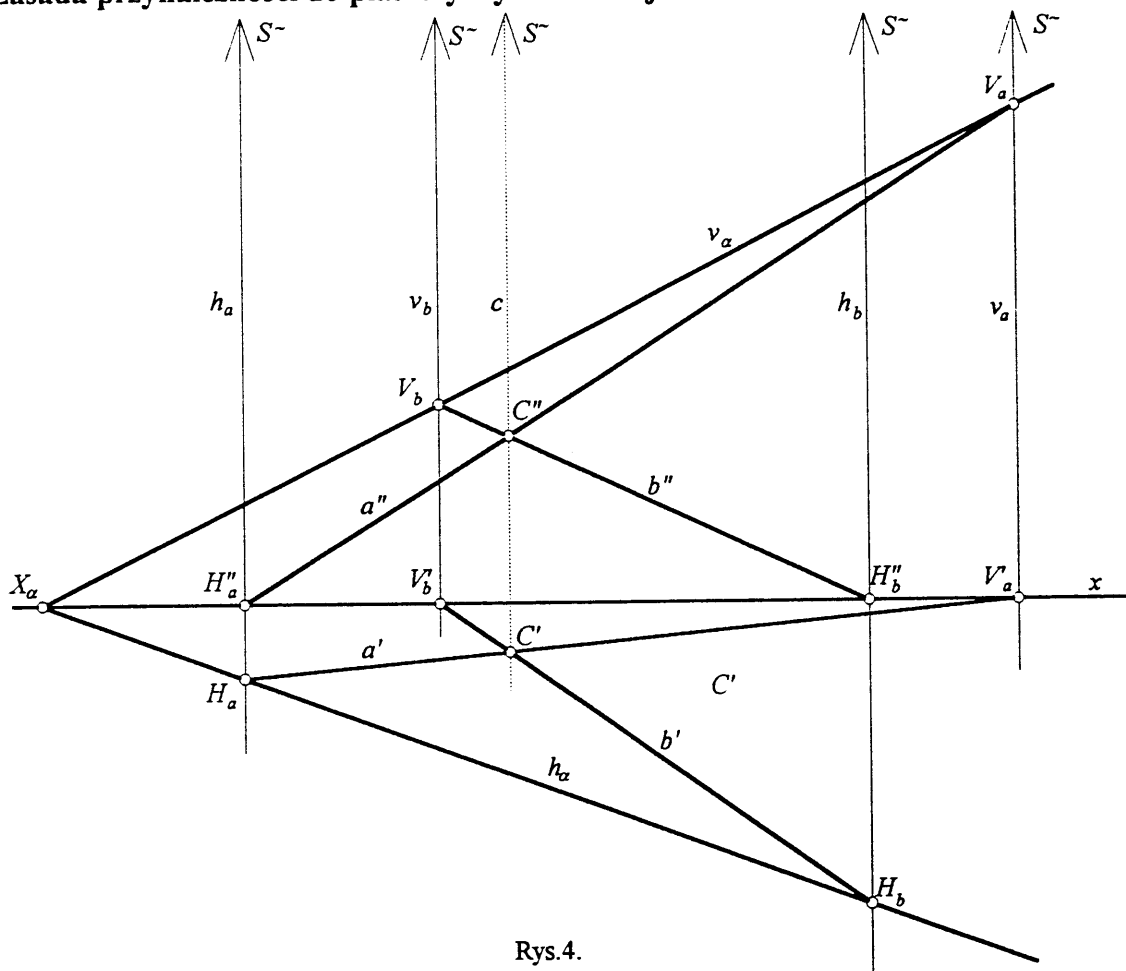
BM	V-Y
$K'_2$	$P_1$
$L'_1$	$P_2$
$C'$	$P_3$
$L'_2$	$P_4$
$K'_1$	$P_5$
$M'$	$P_6$

BM	V-Y
$S^\infty$	$Q$

BM	V-Y
$K''_2$	$P'_1$
$L''_1$	$P'_2$
$C''$	$P'_3$
$L''_2$	$P'_4$
$K''_1$	$P'_5$
$M''$	$P'_6$

Tab.2.

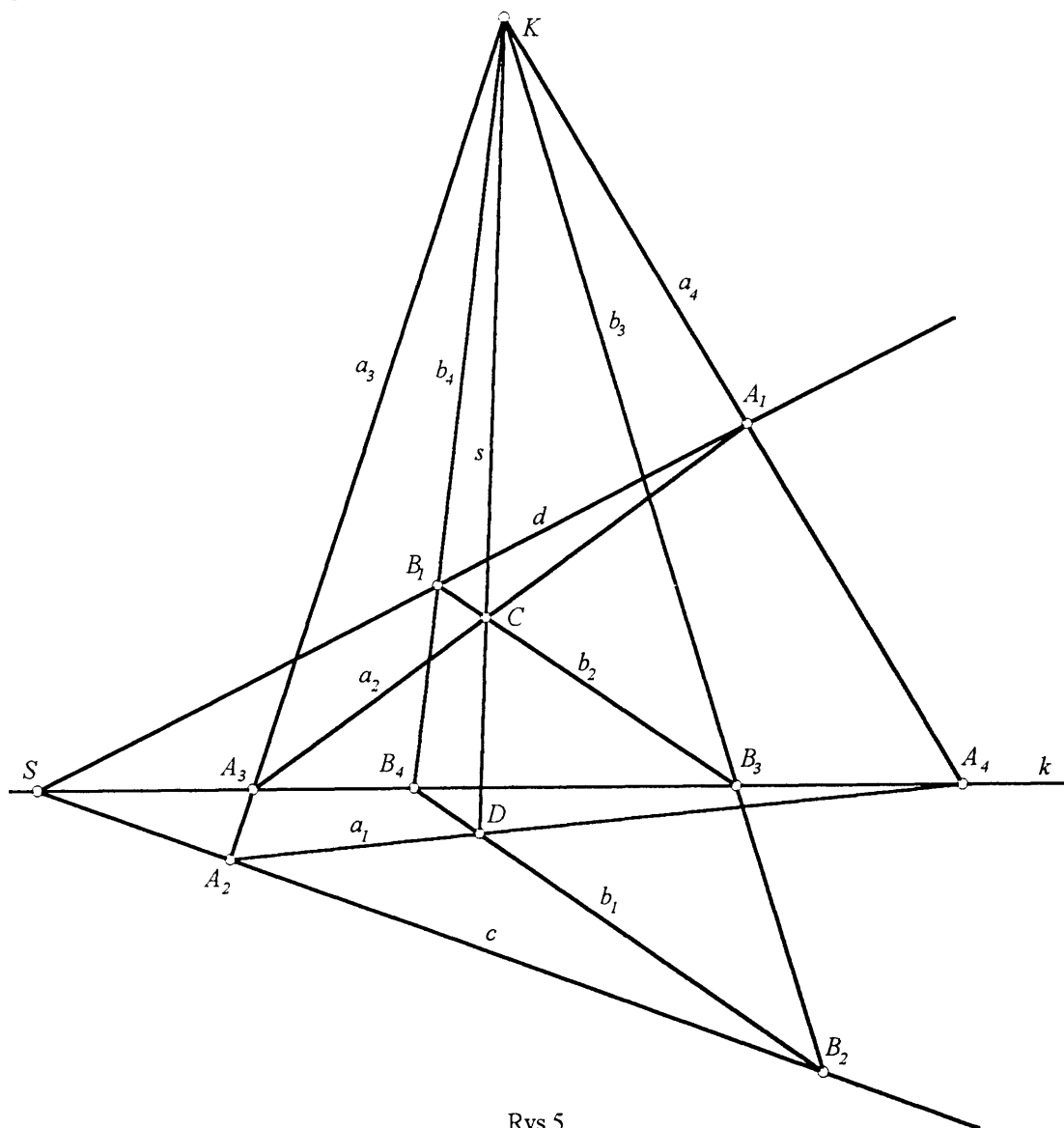
4. Zasada przynależności do płaszczyzny określonej śladami.



Rys.4.

Założmy teraz, że na płaszczyźnie rysunku, na której przyjęto oś rzutów  $x$ , w odwzorowaniu Monge'a dana jest płaszczyzna  $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ , określona za pomocą śladów  $h_\alpha, v_\alpha$ . Niech  $S^\infty$  oznacza kierunek prostopadły do osi  $x$ . Rozważmy dwie proste  $a, b$  leżące na tej płaszczyźnie  $\alpha$ , określone za pomocą śladów  $H_a, V_a; H_b, V_b$  (Rys.4). Oznaczając przez  $H''_a, V''_a; H''_b, V''_b$  odpowiednie rzuty śladów  $H_a, V_a; H_b, V_b$  oraz przez  $X_\alpha$  jedyny punkt zbioru  $h_\alpha \cap v_\alpha \cap x$ , po uwzględnieniu zasady przynależności, mamy następujące incydencje:  $H_a, V''_a | a', H_b, V''_b | b', H''_a, V''_a | a'', H''_b, V''_b | b'', H_a, H_b, X_\alpha | h_\alpha, V_a, V_b, X_\alpha | v_\alpha, H''_a, V''_a, H''_b, V''_b, X_\alpha | x$  i współliniowości  $L(H''_a, H_a, S^\infty), L(V''_a, V_a, S^\infty), L(H''_b, H_b, S^\infty), L(V''_b, V_b, S^\infty)$ . Oznaczmy przez  $C'$  punkt wspólny prostych  $a', b'$ , przez  $C''$  punkt wspólny prostych  $a'', b''$ . Mamy wtedy incydencje  $C' | a', b', C'' | a'', b''$ . Z powyższych

incydencji i współliniowości wynika współliniowość  $L(C'C''S^\infty)$  punktów  $C', C'', S^\infty$  ([2], [4]). Oznaczmy przez  $h_a, v_a, h_b, v_b, c$  odpowiednio proste  $l(H_a H''_a), l(V_a V''_a), l(H''_b H_b), l(V_b V''_b), l(C'C'')$  (Rys.4). Powyższe współliniowości pozwalają zapisać następujące incydencje:  $H''_a H_a S^\infty | h_a, V_a V''_a S^\infty | v_a, H''_b H_b S^\infty | h_b, V_b V''_b S^\infty | v_b, C'C''S^\infty | c$ . Otrzymujemy konfigurację 12 punktów i 12 prostych, którą nazwano *konfiguracją Monge'a* ([2], [5]). Po przyjęciu ogólnych, nie związanych z interpretacją wykreślną, oznaczeń rzutową postać tej konfiguracji przedstawia rysunek 5. Konfiguracja ta jest izomorficzna z interesującą konfiguracją związaną z konstrukcją cienia odcinka ([4],[6]).



Rys.5.

Przytoczone konfiguracje wskazują na geometryczne różnice między metodą śladową i bezśladową. Warto dodać, że u podstaw wielu konstrukcji w teorii rzutów leżą mniej lub bardziej znane, a także nie spotykane dotychczas w literaturze, konfiguracje. Pomijając fakt oczywistej roli konfiguracji Desargues'a i Pappusa, oprócz omawianych wyżej konfiguracji w geometrii wykreślniej funkcjonują: *konfiguracja Reidemeistera*  $R$  (tkwiąca w algorytmie konstrukcji perspektywy trójbieżnej równoległościanu, dualna do znanej *konfiguracji nożyc*), *konfiguracja Reidemeistera*  $R_0$  (umożliwiająca konstrukcję uzupełniania aksonometrii równoległościanu) ([3],[6]). Obok konfiguracji o charakterze afiniczno-rzutowym warto zwrócić uwagę na istnienie płaskich związków metrycznych między różnymi metodami mierzenia obiektów w rzutach ([7]).

## LITERATURA:

- [1]. H. S. M. Coxeter: „Wstęp do geometrii dawnej i nowej”. PWN, Warszawa 1969.
- [2]. A. Guzowski: „Typical Monge's Configurations”. Praca złożona do druku w ZN GEOMETRIA.
- [3]. F. Kartesi: „Introduction to finite geometries”. Akademia Kiadó. Budapest 1976.
- [4]. E. Iwaniuk, E. Koźniewski: „O pewnej konstrukcji punktu załamania cienia odcinka na dwie rzutnie”. Praca przyjęta do druku w ZN Politechniki Śląskiej GEOMETRIA I GRAFIKA INŻYNIERSKA.
- [5]. M. Kordos: „Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej”. PWN, Warszawa 1984.
- [6]. E. Koźniewski: „Wykłady z geometrii wykreślnej i grafiki komputerowej”. Politechnika Białostocka 1994, 1996. Preskrypt.
- [7]. E. Koźniewski: „Zasady konstrukcji rzutów w aspekcie płaskich własności rzutni.” Manuscript.

## THE CONFIGURATIONAL CHARACTER OF THE MONGE'S METHOD

In the academic textbooks on descriptive geometry we meet with two various approaches to the Monge's method. There are the traced and untraced methods. Textbook authors usually prefer one of them ignoring sometimes the other method. In this paper we show that this problem have an essential geometrical sense. Namely, these methods are related to two different geometrical configurations. A construction of the common point of two lines, belonging to the plane defined by means of traces (similarly as the construction of the refraction point of shadow of segment), leads to - so called - the Monge configuration ([2], [3]). Whereas a construction of the common point of two lines, lying on the plane determined by two intersecting lines, takes the configuration dual with reference to Veblen - Young configuration (based on the quadrangle's sextuplet of the points ([1], [4])). The two configurations close themselves if the theorem of Desargues holds on the plane.