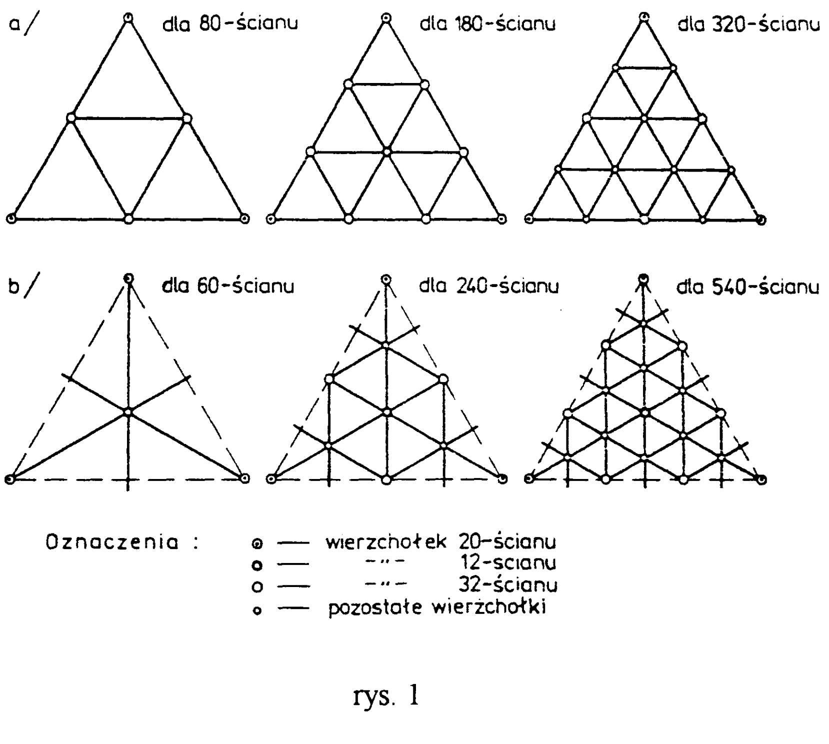
Jarosław Z. MIRSKI
Politechnika Świętokrzyska

GEOMETRIA STRUKTURY DWUWARSTWOWEJ O SIATKACH POWSTAŁYCH Z PODZIAŁU DWUDZIESTOŚCIANU

1. Wprowadzenie

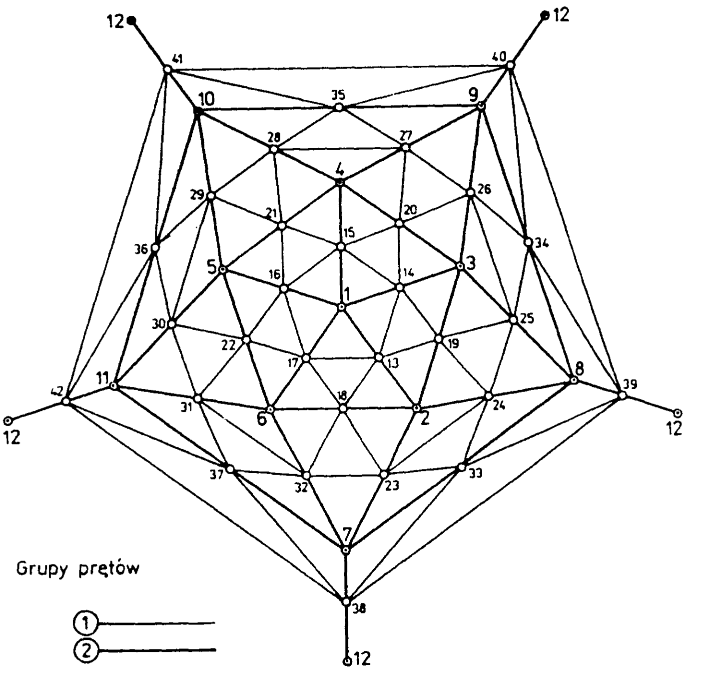
Przestrzenne siatki geometryczne mogą pochodzić między innymi z wielościanów, których wierzchołki leżą na sferach. Kolejne zagęszczenia siatek płaskich wielokątów metodami podziałowymi [1], [2], [3] dają w wyniku wielościany o dużej liczbie ścian.

Dzieląc każdy bok trójkąta równobocznego ściany dwudziestościanu na 2, 3, 4, ..., n części i prowadząc kolejne rodziny linii równoległych podziału do boków trójkąta wyjściowego jak na rys. 1a, otrzymamy kolejno: 80-, 180-, 320-, 500-, 720-ścian i.t.d. A gdy poprowadzimy kolejne linie równoległe podziału do trzech wysokości jak na rys. 1b, otrzymamy kolejno: 60-, 240-, 540-, 960-, 1500-ścian i.t.d..



rys. 1

Pojęcie wielościanu i siatki sferycznej wprowadzono zamiennie, ze względu na tożsamość położenia wierzchołków wielościanu i węzłów siatki na powierzchni sfery. Prostoliniowe boki siatki, a więc krawędzie wielościanu, tworzą łamaną linię cięciw, która zastępuje duże koła sfery. Z tych siatek można konstruować budowle przestrzenne. Określone przestrzennie siatki geometryczne są układami dyskretnymi i mogą być realizowane w praktyce jako prętowe, tarczownicowo-prętowe, inne.



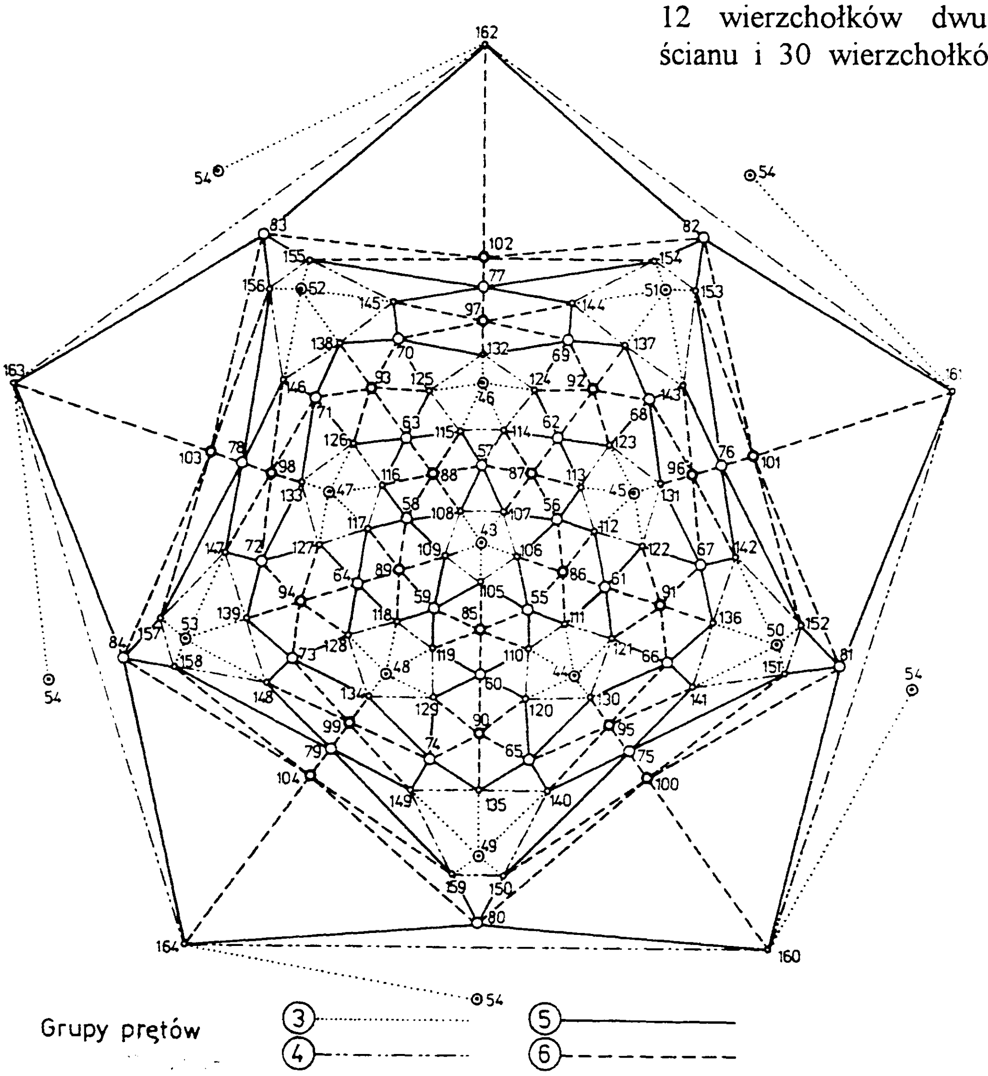
rys. 2

2. Siatki jednowarstwowe

Podział każdej krawędzi dwudziestościanu na dwie równe części wyznacza 30 wierzchołków 32-ścianu półforemnego [4], zawierającego 20 trójkątnych ścian równobocznych i 12 pięciokątnych ścian foremnych oraz 60 jednakowych krawędzi.

Jeżeli teraz na sferę o promieniu R, opisaną na wierzchołkach dwudziestościanu rzucimy środki krawędzi tego wielościanu, to otrzymamy wierzchołki 80-ścianu półforemnego.

Na rys. 2 pokazano schemat ideowy siatki 80-ścianu półforemnego, na który składa się 12 wierzchołków dwudziestościanu i 30 wierzchołków wy-



rys. 3

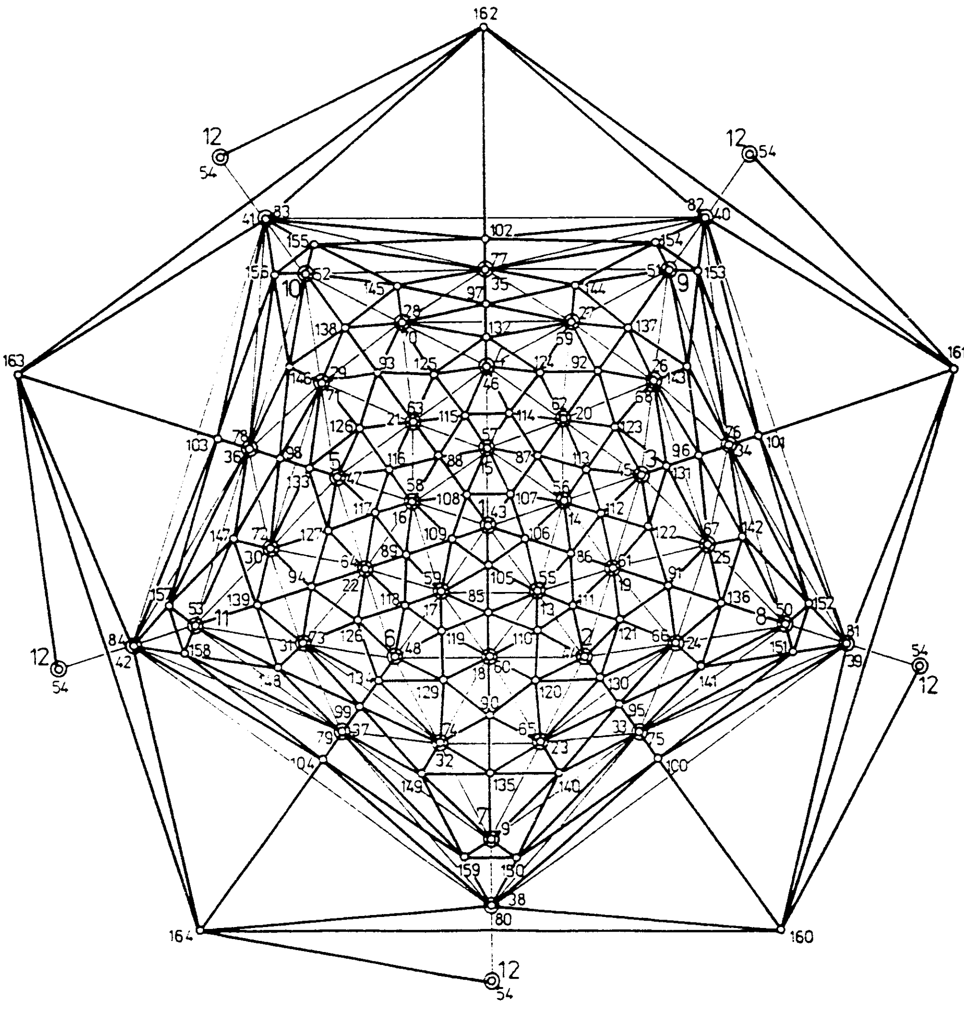
mienionego 32-ścianu półforemnego. Węzły o numerach 1 ÷ 12 są wierzchołkami dwudziestościanu a węzły o numerach 13 ÷ 42 są wierzchołkami 32-ścianu. Pełna siatka, utworzona z tego wielościanu ma 42 węzły i 120 prętów.

Na rys. 3 pokazano schemat ideowy pełnej siatki 240 - ścianu, na który składają się wierzchołki dwudziestościanu od 43 do 54 i wymienionego 32-ścianu półforemnego od 55 do 84 oraz wierzchołki dwunastościanu od 85 do 104 i wierzchołki nowe od 105 do 164. Te nowe wierzchołki leżą na krawędziach siatki sferycznej 60-ścianu, między wierzchołkami dwunastościanu i dwudziestościanu, w połowie krawędzi 60-ścianu. Pełna siatka utworzona z 240-ścianu ma 122 węzły i 360 prętów.

3. Siatka dwuwarstwowa

Siatkę dwuwarstwową otrzyma się łącząc odpowiednio wierzchołki dwóch wielościanów, których wierzchołki leżą na dwóch współśrodkowych sferach o promieniach R_1 , R_2 .

Na rys. 4 pokazano schemat ideowy struktury dwuwarstwowej, w której warstwa I, np. zewnętrzna, o węzłach leżących na sferze o promieniu R_1, odzwierciedla siatkę 240-ścianu półforemnego, zaś warstwa II, o węzłach leżących na sferze o promieniu R_2 , odzwierciedla siatkę 80-ścianu półforemnego.

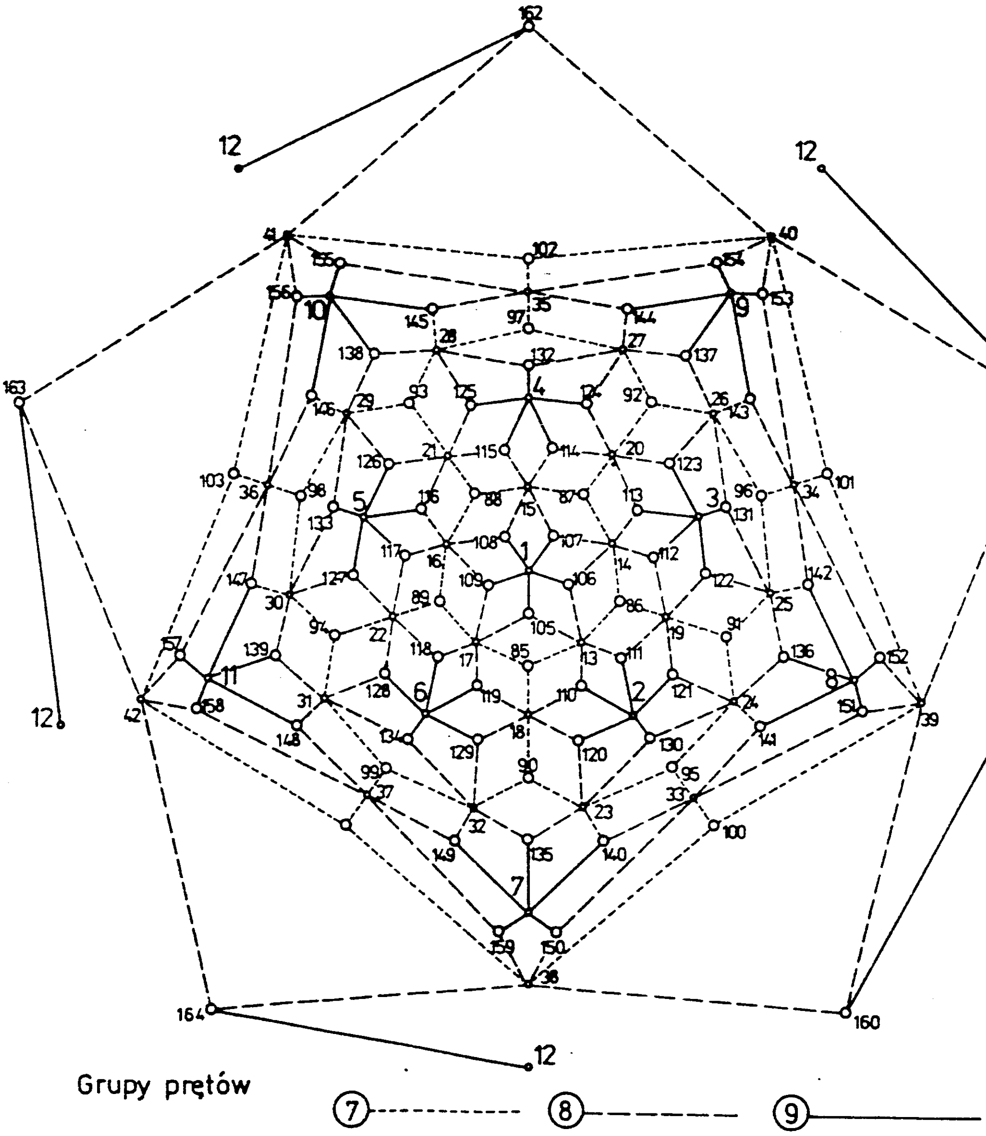


Oznaczenia : o ——— I warstwa ,
O ——— II warstwa

rys. 4

Przez odpowiednie połączenie wymienionych jednowarstwowych siatek, otrzymano pełną dwuwarstwową konstrukcję prętową o 164 węzłach i 720 prętach (w tym 240 prętów łączących obie warstwy).

Na rys. 5 pokazano schemat siatki prętów łączących warstwę zewnętrzną z warstwą wewnętrzną.



rys. 5

4. Związki miarowe

Opisano wszystkie węzły jednowarstwowej konstrukcji prętowej powstałej z e-ementów 80-ścianu, współśrodkową sferą o promieniu R=1,0. Przyjęto także współ-środkowo początek prawoskrętnego układu prostokątnego o osi z skierowanej pionowo do góry. Dla poszczególnych węzłów obliczono współrzędne sferyczne kątowe: ϕ od osi x w kierunku osi y i υ od osi z w kierunku płaszczyzny xy; wartości tych kątów wyjściowych podano w tabeli 1. Współrzędne te zamieniono numerycznie na współrzędne euklidesowe [5], [6] według wzorów:

$$x = R \cdot \cos\phi \cdot \sin\upsilon$$

$$y = R \cdot \sin \phi \cdot \sin \upsilon \qquad (1)$$
$$z = R \cdot \cos \upsilon$$

Następnie obliczono długości prętów jako odległości punktów przestrzeni euklidesowej, tzn. jeśli $k = \{ w_i , w_j \}$ oraz współrzędne wierzchołków są $w_i\ (x_i , y_i , z_i)$ oraz $w_j\ (x_j , y_j , z_j)$ to jego długość wyraża się wzorem:

$$l(k) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \qquad (2)$$

Obliczone numerycznie długości prętów są w dwóch grupach: ①0.618113399 · R i ②0.54653306 · R, odróżnione od siebie na rys. 2 zmianą grubości. Podobnie, wszystkie węzły jednowarstwowej konstrukcji prętowej powstałej z 240-ścianu opisano współśrodkową sferą o promieniu R = 1.0 i także współśrodkowo przyjęto początek układu prostokątnego.

Ponieważ wszystkie współrzędne sferyczne kątowe wierzchołków 80-ścianu zawierają się w 240-ścianu, więc wyznaczono nieznane współrzędne sferyczne wierzchołków nowych, z których wyjściowe podano w tabeli 1. Obliczone długości prętów są w czterech grupach długości: ③ 0,62843 ·R , ④ 0.356822 ·R , ⑤ 0,333333 ·R , ⑥ 0,286505 ·R .

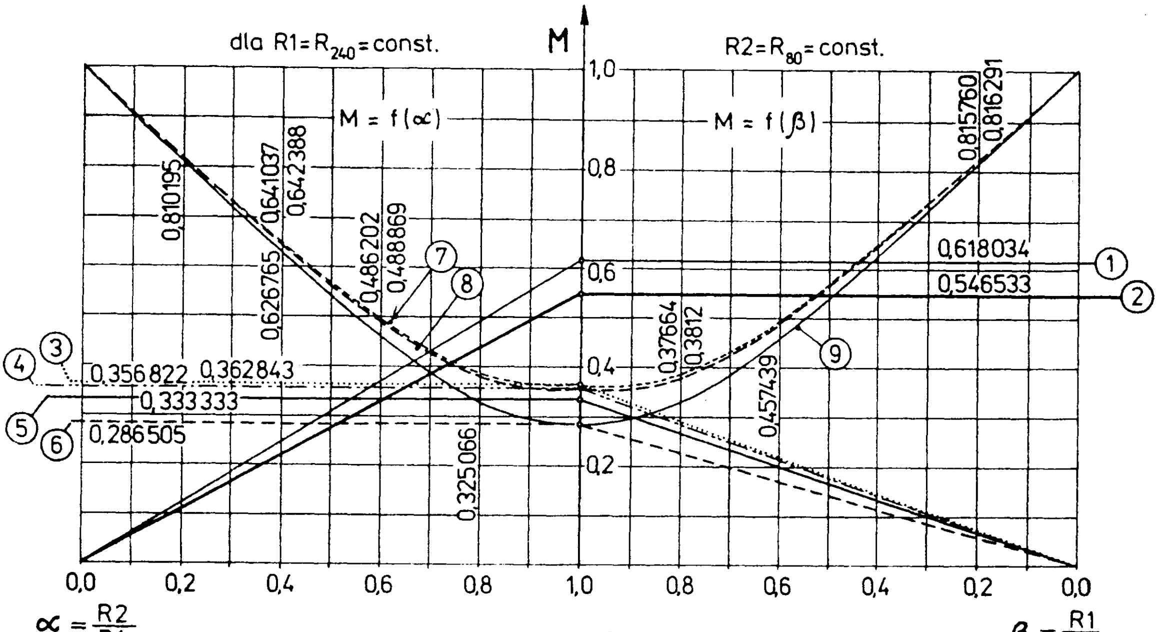
Numer węzła		Współrzędne sferyczne kątowe	
		φ_i	ϑ_i
1	43	0°	0°
13	55	36°	31°43′02,909″
18	60	0°	58° 16′57,091″
2	44	36°	63°26′05,815″
23	65	18°	90°
	105	0°	16°28′ 19,92″
	85	0°	37°22′38,525″
	110	23° 33′ 13,02″	50°39′ 04,90″
	120	19° 15′ 55,87″	69°28′ 58,30″
	90	0°	79° 11′ 15,659″
	130	36°	79°54′ 25,755″

tabela 1

Aby otrzymać wymiarowe długości prętów, dla wyżej wymienionych grup, należy podane wartości pomnożyć przez rzeczywistą wartość odpowiedniego promienia.

Przy współśrodkowym ustawieniu dwu jednowarstwowych konstrukcji jak na rys. 4 i połączeniu ich jak na rys. 5 otrzymano konstrukcję dwuwarstwową. Wyznaczone numerycznie długości prętów łączących są w trzech grupach długości i dla $R_1 = R_2 = 1.0$ wynoszą:
⑦ 0,362843 ·R , ⑧ 0,356822 ·R, ⑨ 0,286505 ·R.

Zmiana wzajemnej relacji promieni dwu sfer opisujących węzły struktury dwuwarstwowej pozwala na zmianę odległości między warstwami. Drogą obliczeń numerycznych przeprowadzono analizę długości poszczególnych prętów, w zależności od stosunku R_1 do R . Przy R_1 = R_2= 1.0 otrzymuje się najmniejszą liczbę grup prętów różnej długości. Wyniki tej analizy, w postaci bezwymiarowych współczynników *M*, pokazano na rys. 6.



rys. 6

6. Zakończenie

Z konstrukcji jedno- i dwuwarstwowych można tworzyć kopuły wybierając według uznania odpowiednie węzły na podparcia. Dwuwarstwowe kopuły prętowe mogą być stosowane dla większych rozpiętości niż jednowarstwowe, ze względu na większą stateczność.

Przedstawiona w pracy topologia i geometria kratownic dwukrzywiznowych stanowi dla projektanta podstawę analizy i wyboru z danej rodziny na konstrukcję. Zarówno pręty tych kratownic jak i węzły leżące na sferach, odzwierciedlające elementy wielościanów powstałych z kolejnych przekształceń, zapewniają pewną regularność, która jest przydatna w obliczeniach numerycznych.

Wyniki zawarte w tej pracy mają być wykorzystane do dalszych prac badawczych geometryczno - statyczno - wytrzymałościowych [7] i do projektowania konstrukcji rzeczywistych.

Literatura:

[1] J. Fuliński: "Geometryczne elementy projektowania kratownic powierzchniowych", Zeszyty Naukowe AR. Nr 64, Wrocław. Melioracja XI, 1966, (s.8-41)

[2] J.Z.Mirski : "Siatki powstałe z przekształceń 8-ścianu foremnego", Zeszyty Naukowe AR. Wrocław, Geodezja i UR. XI Nr 231, 1993, (s.177 - 189)

[3] J.Z.Mirski : "Tworzenie siatek dwuwarstwowych z przekształceń 4-ścianu foremnego", Zeszyty Naukowe PŚk, Kielce, Bud, Nr 34, 1996, (s.45 - 50)

[4] J.Z.Mirski : "Parametry geometryczne 32-ścianów foremnych", Zeszyty Naukowe AR, Wrocław, Mel. XXXVII, Nr 194, 1990, (s.123 - 133)

[5] J.Z.Mirski : "Program obliczeń parametrów geometrycznych konstrukcji prętowych opartych na sferach", Zeszyty Naukowe AR, Wrocław, Geodezja i UR, V, Nr 188, 1990, (s. 261 - 267)
[6] R.Dąbrowski, J.Z.Mirski : "Obliczanie geometrii kratownic sferycznych z wykorzystaniem mikrokomputera", Zeszyty Naukowe AR, Wrocław, Mel, XXXVI, Nr 192, 1990, (s. 15 - 23)
[7] J.Z.Mirski : "Porównanie parametrów geometrycznych i statycznych wybranych dwuwarstwowych kopuł prętowych", XXXIII Konf. Nauk, KILW PAN i PZITB, Gliwice - Krynica 1987, (s.97 - 102)

GEOMETRY OF THE TWO-LAYER STRUCTURE OF LATTICES CREATED BY DIVISION OF ICOSAHEDRON

By dividing each side of the equilateral triangle being a face of a regular 20-hedron into 2 parts and clipping parting lines as in fig.1, we get semi-regular 80-and 240-hedrons. Vertices of the two polyhedrons lie on the concentric sphere. Rectilinear sides of the lattice, i.e. the polyhedron's sides, form the broken line of chords replacing the sphere's circles. The given geometrical parameters and the topology of each polyhedron's lattice (see fig. 2 and 3) can be used in designing one-layer bar space structures, e.g. cupolas. Two such lattices (as shown in fig. 4) may be connected in a way presented in fig. 5 to form a two-layer space structure.