

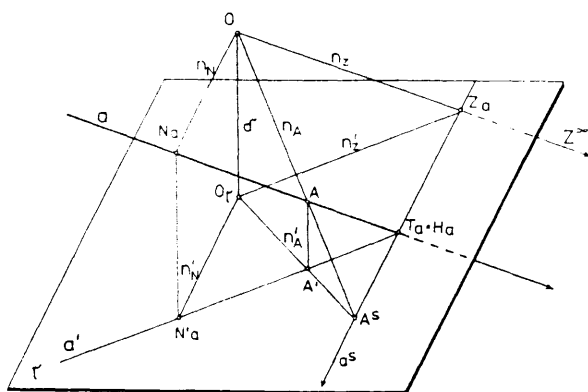
RZUT ŚRODKOWY A RZUT CECHOWANY

Metodę rzutu środkowego i prostokątnego na tę samą rzutnię użyto w celu pokazania związków geometrycznych zachodzących pomiędzy obydwoma odwzorowaniami tego samego obiektu przestrzennego.

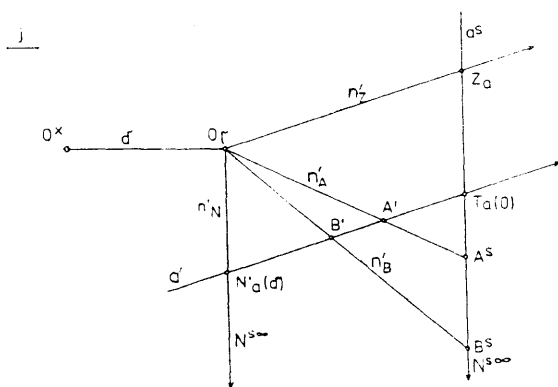
Weźmy pod uwagę prostą a (rys. nr 1), jej rzut środkowy a^s ze środka rzutu O na rzutnię $\tau = \pi$ oraz rzut prostokątny a' prostej a .

Rys. nr 2 przedstawia obydwa rzuty prostej a na płaszczyznę rysunku.

Oznaczmy przez:



Rys. 1.



Rys. 2.

- O_r – punkt główny (rzut prostokątny środka rzutu O na rzutnię τ)
- δ – głębokość tłową (odległość środka O od τ) $\delta = OO_r$
- n_z – promień zbiegu (prosta rzucająca punkt niewłaściwy Z^∞ prostej a : $n_z = OZ_a$)
- Z_a – ślad zbiegu prostej a (punkt wspólny rzutni i promienia zbiegu prostej a)
- T_a – ślad tłowy prostej a (punkt wspólny rzutni i prostej a)
- a^s – rzut środkowy prostej a z punktu O na τ ($a_s = T_a Z_a$)
- a' – rzut prostokątny prostej a na rzutnię $\pi = \tau$
- n'_z – rzut prostokątny promienia zbiegu $n'_z = O_r Z_a$

Rzut środkowy prostej a to prosta a^s określona punktami Z_a, T_a . Rzut prostokątny prostej a możemy uznać za rzut cechowany. Można bowiem wskazać cechy dwóch punktów prostej a w jej rzucie prostokątnym. Punkt T_a jest jednocześnie śladem H_a prostej a , zatem ma cechę zero.

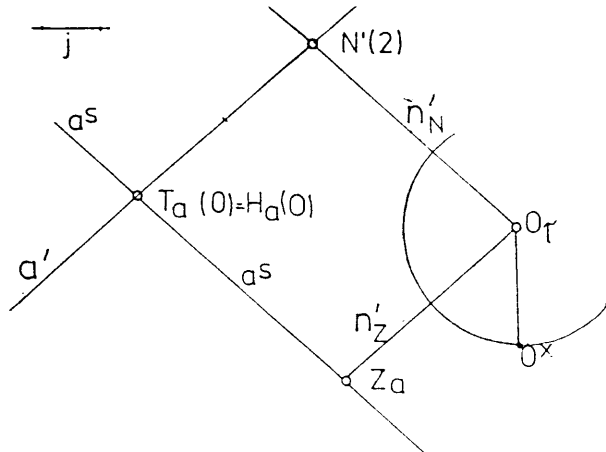
Zauważmy, że punkt zniknięcia prostej a tj. jej punkt przebicia płaszczyzny zniknięcia (płaszczyzny przechodzącej przez O i równoległej do τ) oznaczony N_a , którego rzut

prostokątny oznaczono N'_a , ma taką samą odległość od rzutni jak środek rzutu O . Zatem punkt N_a ma cechę równą głębokości tłowej δ .

Rzutem środkowym punktu N_a jest punkt niewłaściwy N^∞ prostej a . Zauważmy, iż punkty O_r, Z_a, T_a, N'_a tworzą równoległobok.

$$\begin{aligned} n'_z \parallel a' &\leftrightarrow O_\tau Z_a \parallel N'_a T_a \\ a_s \parallel n'_N &\leftrightarrow Z_a T_a \parallel O_\tau N'_a \end{aligned}$$

Jeśli dany jest rzut środkowy prostej $a' = Z_a T_a$ oraz O_τ i δ to konstrukcja rzutu cechowanego tej prostej jest natychmiastowa. Wystarczy (rys. nr 2) poprowadzić prostą a' równoległą do n'_z przez punkt T_a . Prosta n'_N równoległa do a' poprowadzona przez punkt O_τ wyznacza na prostej a' punkt N'_a o cesze równej δ .



Rys. 3.

Odwrotnie: jeśli dany jest rzut cechowany a' prostej a na π oraz O_τ , δ to konstrukcja rzutu środkowego a' tej prostej (z punktu O na $\tau = \pi$) jest następująca: (rys. nr 3)

- 1) należy na prostej a' wskazać punkt $N'(a)$ o cesze równej δ i połączyć z O_τ - jest to prosta n'_N .
- 2) z punktu O_τ poprowadzić prostą n'_z równoległą do a' ,
- 3) przez punkt $H_a(O) = T_a$ poprowadzić prostą a^s równoległą do n'_N .

Proste n'_z i a^s wyznaczają punkt Z_a . Obierzmy punkty $A, B, \dots$ na prostej a . Skonstruujemy

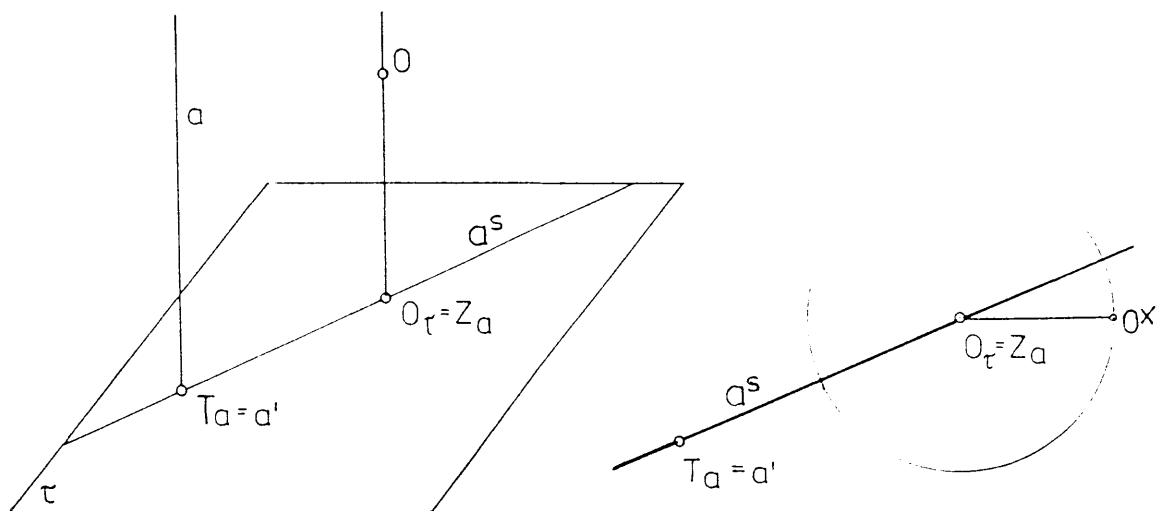
perspektywę $A^s, B^s, \dots$ tych punktów. Proste $OA, OB, \dots$, są promieniami widzenia $n'_A, n'_B, \dots$

$$n'_A = O_\tau A^s, \quad n'_B = O_\tau B^s$$

Punktami wspólnymi prostej a' oraz prostych $n'_A, n'_B, \dots$ są punkty $A', B', \dots$

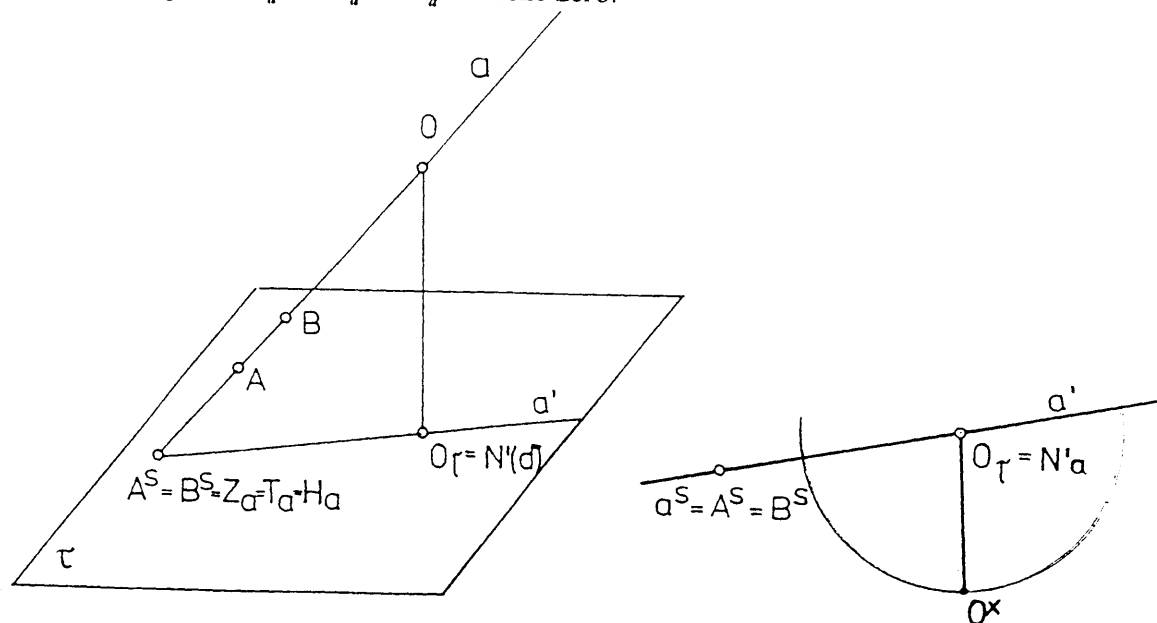
Szeregi $a'(A', B', \dots)$ i $a^s(A^s, B^s, \dots)$ są perspektywiczne. Identyczny związek perspektywiczności zachodzi pomiędzy rzutem cechowanym a rzutem środkowym każdej prostej przestrzeni. Środkiem perspektywiczności jest zawsze O_τ .

Szczególne położenie prostej względem rzutni $\tau = \pi$



Rys. 4a

1. Jeśli prosta jest prostopadła do tła (rys. nr 4a) to oczywiście jej rzut cechowany jest punktem $T_a = a'$ zaś rzut środkowy jest prostą $a' = Z_a T_a$,
2. Jeśli prosta przechodzi przez środek rzutu (rys. nr 4b) to odwrotnie: rzut środkowy jest punktem $T_a = Z_a = a'$ zaś rzut cechowany jest prostą przechodzącą przez punkt $O_r = N'_a$ o cesze δ i punkt $T_a = Z_a = H_a$ o cesze zero.

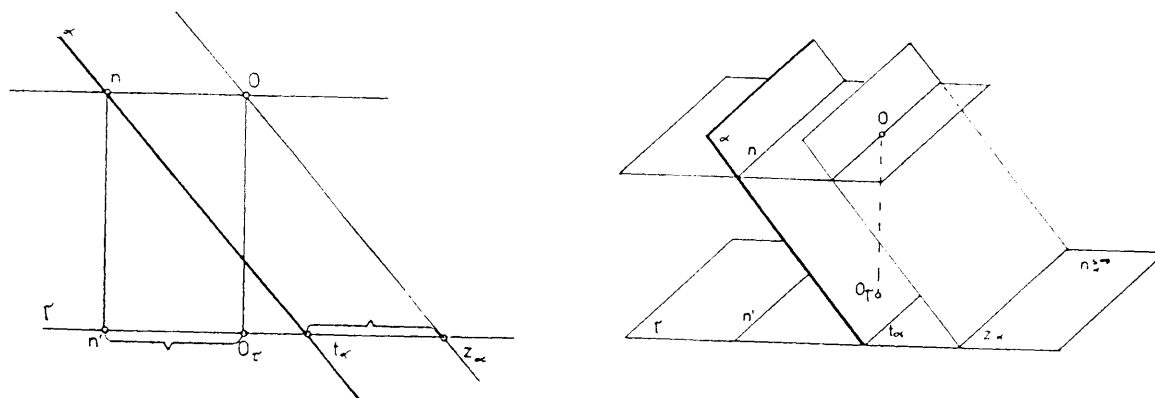


Rys. 4b

3. Jeśli prosta jest równoległa do tła to rzut środkowy i cechowany prostej mają wspólny punkt niewłaściwy i podana konstrukcja zawodzi bez dodatkowych danych.

Rzut środkowy a rzut cechowany płaszczyzny

Weźmy pod uwagę płaszczyznę α w położeniu ogólnym względem rzutni, (rys. nr 5a i 5b) jej rzut środkowy α' i jej rzut cechowany α'' na tę samą rzutnię $\tau = \pi$.
Pomiędzy rzutem środkowym α' a rzutem cechowanym α'' płaszczyzny α zachodzi płaskie przekształcenie kolineacyjne o środku O_r , osi kolineacji t_α , prostej granicznej z_α w układzie α'



Rys. 5.

Płaszczyzna w położeniach szczególnych

- a). Jeżeli płaszczyzna α jest równoległa do tła to rzuty: środkowy i cechowany tworzą obrazy podobne o środku O_r .
- b). Jeżeli płaszczyzna α przechodzi przez środek rzutu O to rzut środkowy jest prostą $t_\alpha = z_\alpha$ a rzut cechowany określa warstwica o cesze punktu O ($O_\alpha = z_\alpha = t_\alpha$) i warstwica o cesze równej δ przechodząca przez O_r .
- c). Jeżeli płaszczyzna α jest prostopadła do tła tzn. jest w położeniu rzutującym, $\alpha' = t_\alpha$. Rzut środkowy to perspektywa pionowa występująca najczęściej i stosowana w pracy architekta.

Istotne wnioski z konstrukcji:

1. Dowolnie obranemu punktowi A' układu α' odpowiada jeden i tylko jeden punkt A'' układu α'' i odwrotnie.
2. Dowolnie obranej prostej a' układu α' odpowiada dokładnie jedna prosta a'' układu α'' .
3. Zbiorowi punktów $A', B', \dots$, leżących na prostej a' odpowiada zbiór punktów $A'', B'', \dots$ leżących na a'' i odwrotnie.
4. Pary odpowiadających sobie punktów $A'A'', B'B''$, leżą na prostych n'_A, n'_B przechodzących przez stały punkt O_r . Proste n'_A, n'_B są prostymi łączącymi przyporządkowane punkty w obydwu rzutach.
5. Pary odpowiadających sobie prostych a', a'', b', b'' przecinają się w punktach T_a, T_b leżących na jednej prostej t_α .

Dla płaszczyzny α w położeniu ogólnym (z wykluczeniem położenia szczególnych) zbiorem punktów niewłaściwych jest prosta niewłaściwa z_α^∞ . Jej rzutem środkowym jest prosta właściwa z_α (ślad zbiegu).

Natomiast rzutem prostokątnym tej prostej jest prosta niewłaściwa z'_α rzutni τ czyli ślad zbiegu jest prostą graniczną układu perspektywy.

Płaszczyzna α przecina płaszczyznę zniknięcia wzdłuż prostej n , której perspektywą jest prosta n_α^s , natomiast rzutem prostokątnym jest prosta właściwa n' równoległa do t_α (cecha tej prostej jest równa głębokości tłowej).

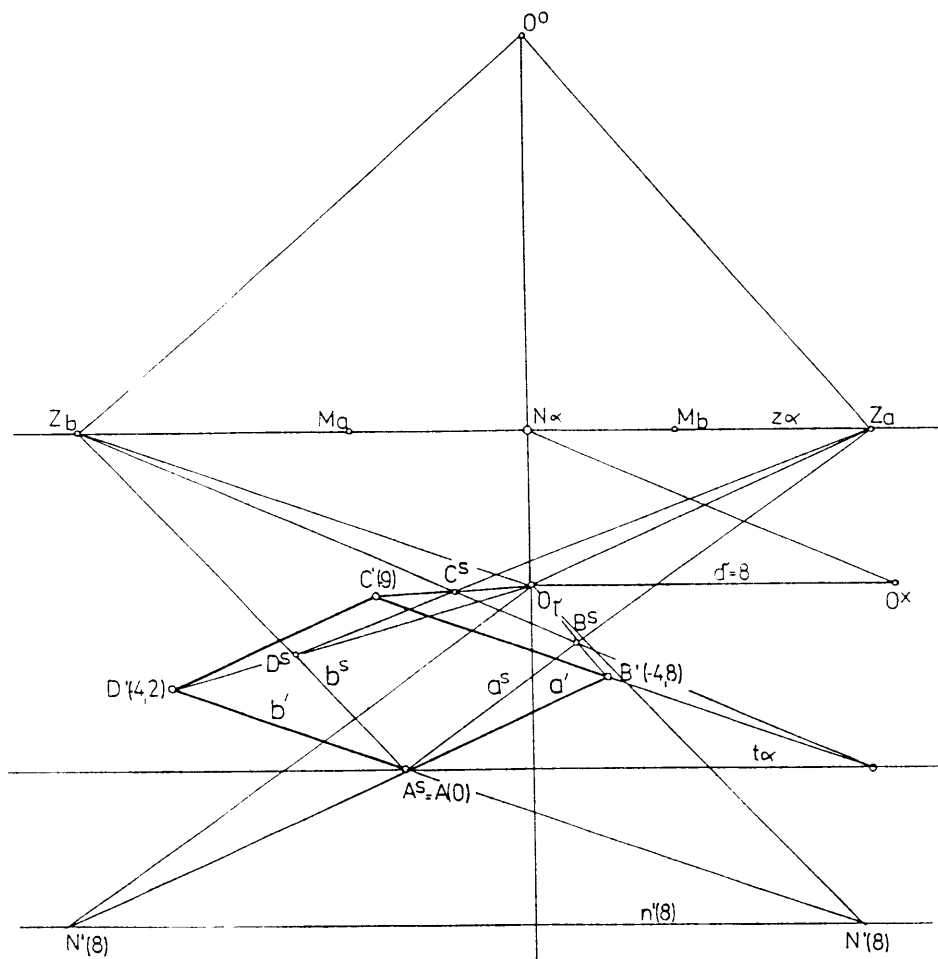
Prostej n' odpowiada prosta niewłaściwa czyli n' jest prostą graniczną rzutu prostokątnego. Prosta graniczna n' znajduje się w takiej odległości od O_r jaka jest pomiędzy prostą graniczną z_α i osią kolineacji t_α .

Kolejne rysunki 6, 7, 8, 9 przedstawiają przykłady konstruowania rzutu cechowanego na podstawie rzutu środkowego dla figur i brył np: kwadratu, sześcianu, sześcianu przy z_{90} niewłaściwym, wielościanu.

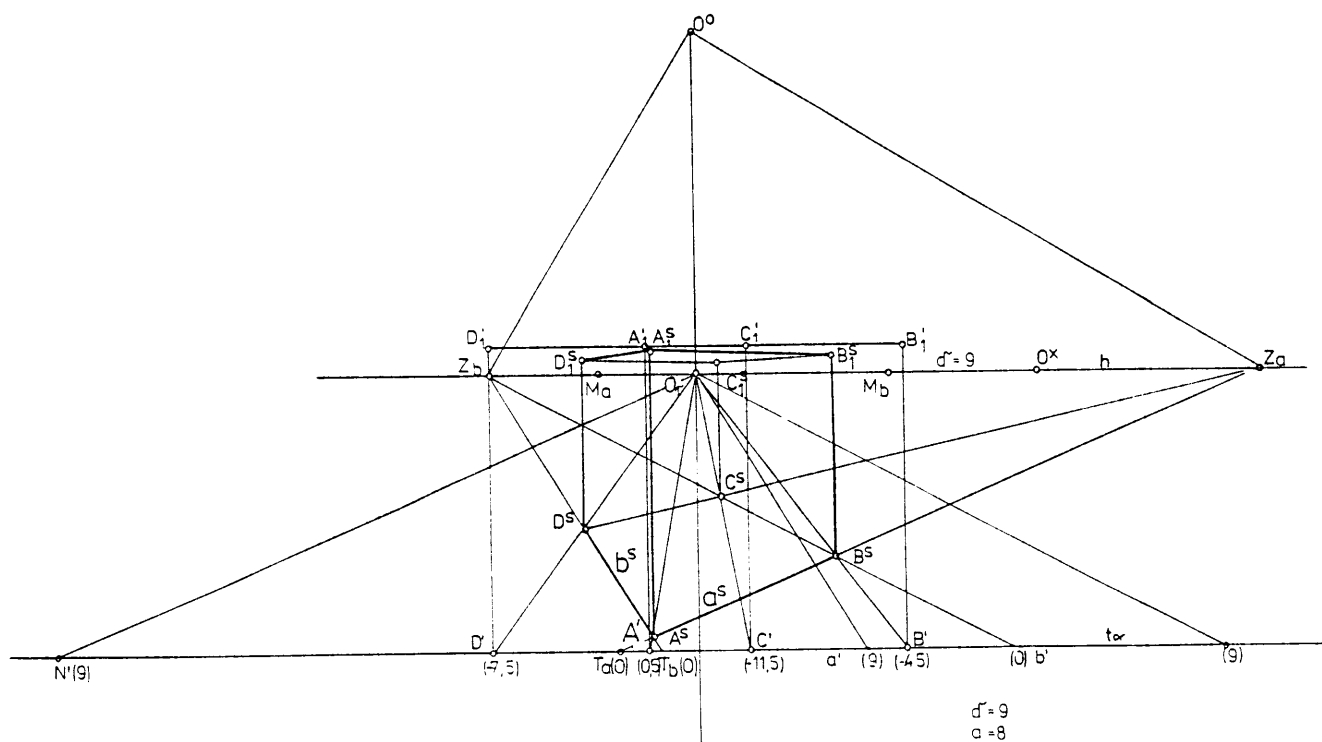
CENTRAL AND TOPOGRAPHIC PROJECTIONS

The problem of the reciprocal, geometrical relations between the central and topographic projections is considered.

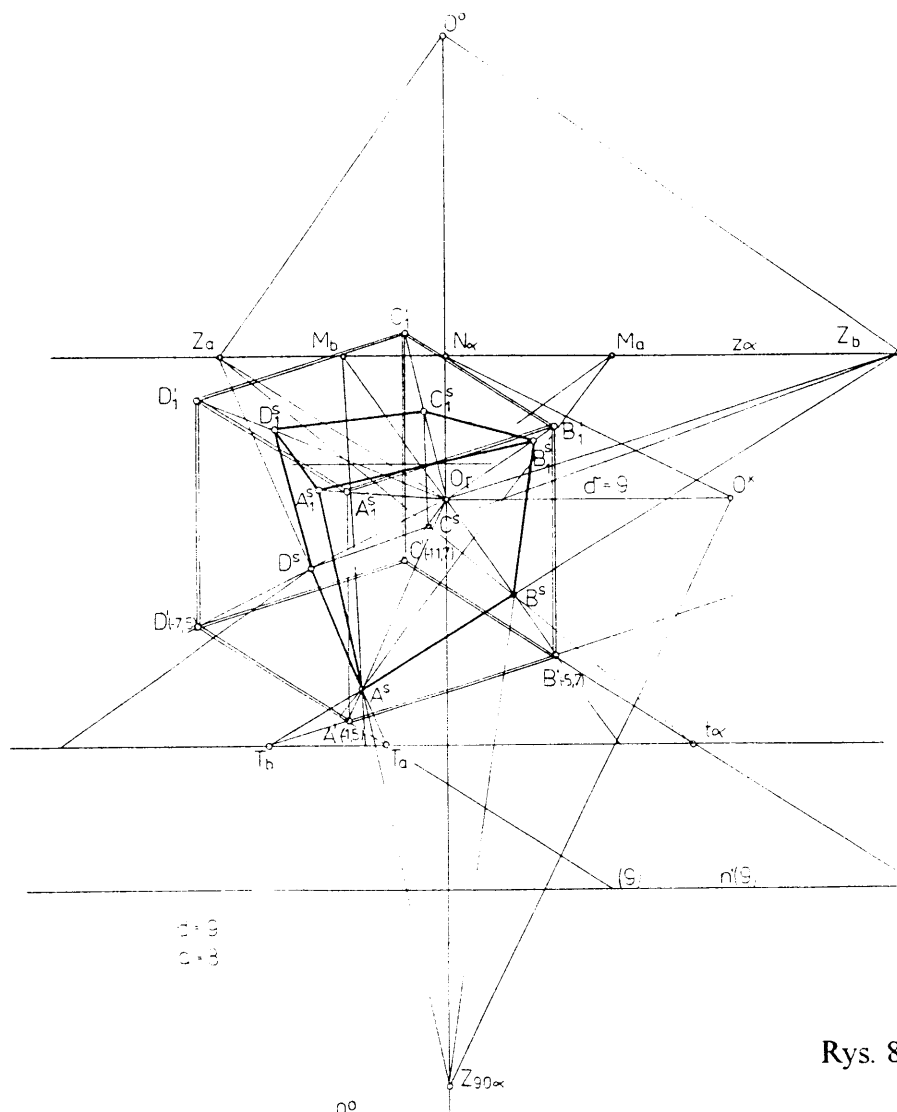
A simple construction allowing to find the topographic projection of an arbitrary object having given its central projection and vice versa is presented. Collineation is applied.



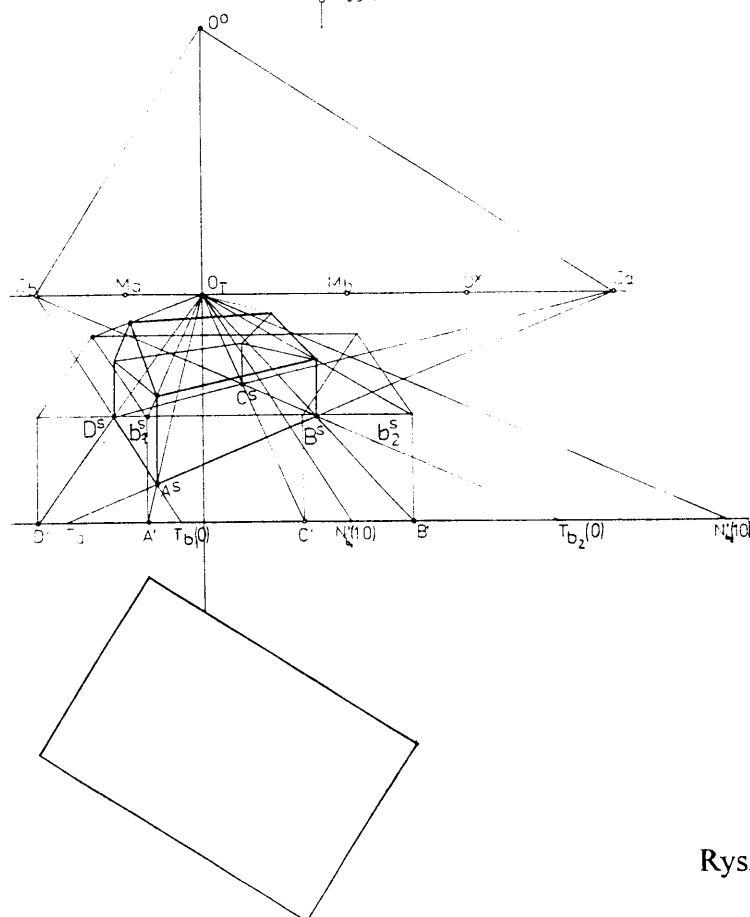
Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 8.



Rys. 9.