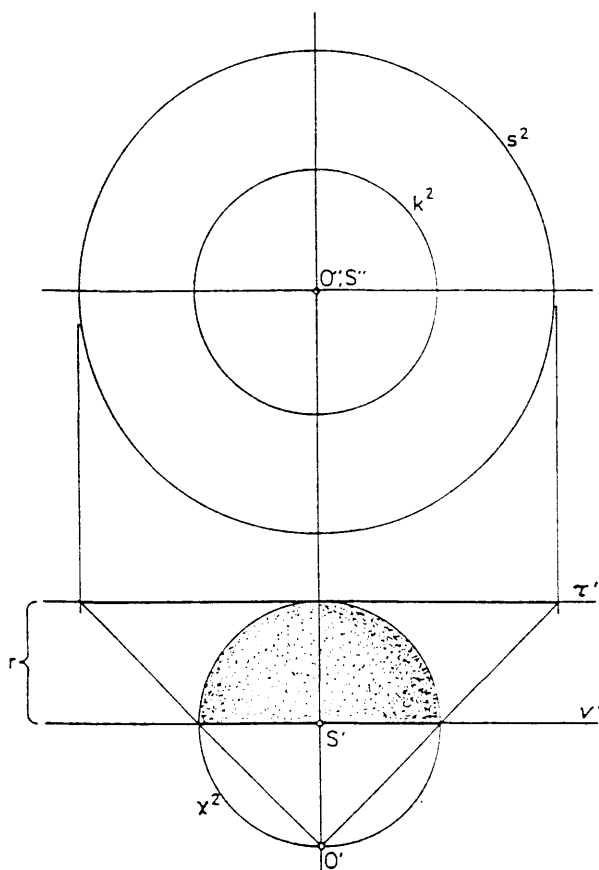


## NIEKOLINEARNA PERSPEKTYWA SZEROKOKĄTNA.

Założeniem pracy było zaproponowanie takiej perspektywy szerokokątnej, w której obrazami prostej byłyby łuki okręgów. Spełnienie tego założenia pozwala na opracowanie konstrukcji stosunkowo prostych w porównaniu z innymi perspektywami niekolinearnymi.

Niekolinearna perspektywa szerokokątna jest złożeniem dwóch rzutów (rys. 1). Rzut środkowy ze środka  $S$  sfery  $\chi^2$  odwzorowuje punkty przestrzeni na sferę. Następnie otrzymane obrazy rzutowane są z bieguna  $O$  sfery na tło płaskie  $\tau$  styczne do sfery w biegunie przeciwnym. Promień rzutowania łączący odwzorowywany punkt ze środkiem sfery przebija sferę w dwóch punktach. Aby uniknąć konsekwencji wynikających z tego faktu kąt wierzchołkowy obrotowego stożka widzenia ograniczono do  $180^\circ$ . Odwzorowywane są więc tylko obiekty znajdujące się przed płaszczyzną  $v$  przechodzącą przez środek sfery i równoległą do tła na część sfery znajdującą się przed płaszczyzną  $\tau$  (na rysunku część sfery zakropkowana). Płaszczyznę  $v$  nazwano, nawiązując do rzutu środkowego, płaszczyzną znikania.



rys. 1

Analogiczny sposób odwzorowania przedstawiony jest w "Perspektywie malarskiej" tom 2 Kazimierza Bartla. Krótki akapit poświęcony temu odwzorowaniu autor podsumowuje jednakże stwierdzeniem, że ze względu na stopień skomplikowania konstrukcji metoda ta nie ma praktycznego zastosowania. W pracy posłużono się konstrukcjami odmiennymi od zamieszczonych w "Perspektywie malarskiej", co pozwoliło na wysnucie

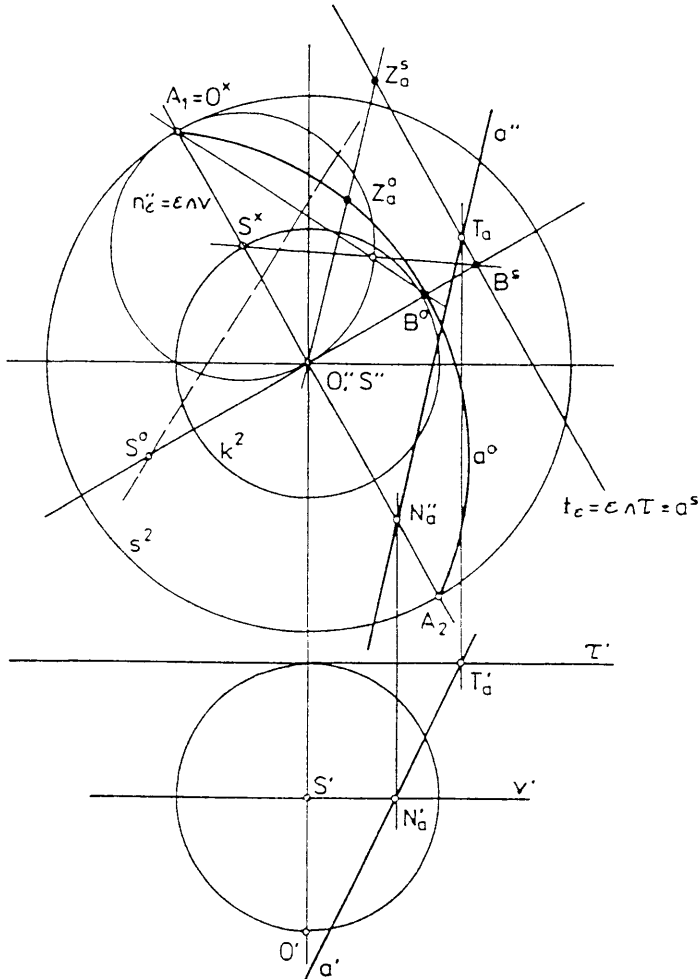
wniosków różnych od tezy Kazimierza Bartla.

Niekolinearna perspektywa szerokokątna umożliwia jednoznaczną charakterystykę elementów przestrzeni oraz określenie relacji zachodzących między nimi. Kreśląc perspektywę szerokokątną dysponujemy analogicznymi konstrukcjami jak w przypadku rzutu środkowego, stopień ich złożoności jest jednakże większy.

W celu przybliżenia problemów konstrukcyjnych związanych z niekolinearną perspektywą szerokokątną przeanalizujemy obraz prostej oraz płaszczyzny.

Ustalenie 1.

Przyjmijmy następujący aparat rzutowania: sferę  $\chi^2$  o środku  $S$ , styczną do niej płaszczyznę  $t_a$ , płaszczyznę znikania  $v//\tau$  przechodzącą przez  $S$ , oraz punkt  $O$  - środek rzutu stereograficznego będący biegunem antypodycznym do punktu styczności  $\chi^2$  i  $\tau$ . Na płaszczyźnie  $t_a$  oznaczymy:  $k^2$  - kontur sfery  $\chi^2$  w rzucie prostokątnym na tło;  $s^2$  - obraz równika sfery w rzucie stereograficznym.



rys. 2

Niech będzie dana prosta  $a$  określona jej rzutami prostokątnymi  $a'$ ,  $a''$  (rys.2).

Definicja 1.

Śladem tłowym prostej  $a$  nazywamy jej punkt przebiecia z płaszczyzną  $t_a$ .

Definicja 2.

Śladem znikania prostej  $a$  nazywamy jej punkt przebiecia z płaszczyzną znikania  $v$ .

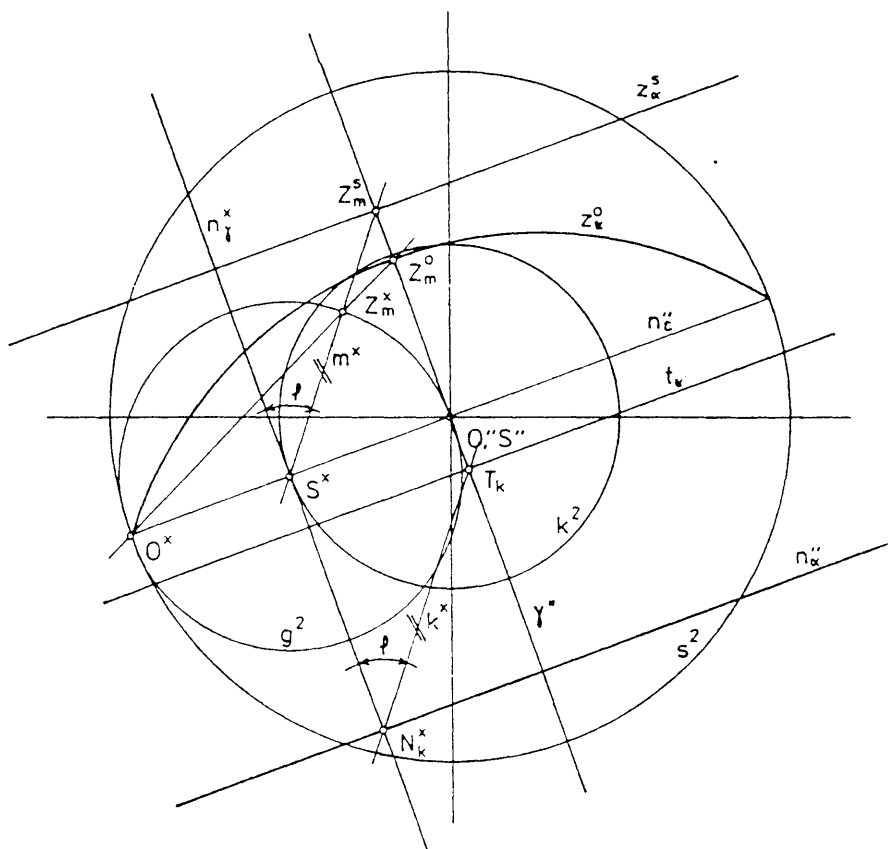
Poprowadźmy rzutującą płaszczyznę  $\varepsilon$  przechodzącą przez rozpatrywaną prostą  $a$  oraz punkt  $S$ . Krawędź  $n_\varepsilon$  tej płaszczyzny z płaszczyzną znikania  $v$  przechodzi oczywiście przez punkt  $S$  i przez ślad znikania  $N_a$ . Krawędź  $t_\varepsilon$  przechodzi zaś przez ślad tłowy  $T_a$  równoległe do  $n_\varepsilon$  ( $t_\varepsilon/n_\varepsilon$ ) i jest to obraz prostej  $a$  w klasycznym rzucie środkowym z punktu  $S$  na tło płaskie  $\tau$ .

Przekrój sfery  $\chi^2$  płaszczyzną  $\varepsilon$  jest obrazem prostej  $a$  w rzucie środkowym na tę sferę. Jest to oczywiście okrąg wielki na sferze, a dokładniej łuk tego okręgu leżący przed płaszczyzną znikania.

Obrazem tego łuku w rzucie stereograficznym na tło jest także łuk okręgu (łuk  $a^o$  na rys.2) leżący całkowicie we wnętrzu  $s^2$ .

Zauważmy, że łuk  $a^o$  przechodzi przez punkty  $A_1$  i  $A_2$ , w których rzut prostokątny na tło  $n_\varepsilon''$  przecina okrąg  $s^2$ . Istotnie: krawędź  $n_\varepsilon$  przecina sferę w punktach leżących na południku konturowym, rzutując te punkty z punktu  $O$  na tło otrzymujemy dwie proste rzutujące, których obrazy w rzucie prostokątnym na tło pokrywają się z  $n_\varepsilon''$ .

Należy znaleźć trzeci punkt łuku  $a^o$ . W tym celu poprowadźmy płaszczyznę  $\varphi$  prostopadłą do tła  $\tau$  i prostopadłą do  $\varepsilon$ . Płaszczyzna ta jest oczywiście prostopadła do  $t_\varepsilon$  i do  $n_\varepsilon$  oraz wykonajmy jej kład na tło. Na rys.3 oznaczono:  $O^x$  - kład punktu  $O$  i  $S^x$  - kład punktu  $S$ . Wykorzystując ten kład znajdziemy w omawianym odwzorowaniu obraz  $B^o$  punktu  $B$ . Jest to szukany trzeci punkt łuku  $a^o$ . Na rys.3 pokazano także konstrukcję środka  $S^o$  tego łuku.



rys. 3

Poprowadźmy przez punkt  $S$  prostą równoległą do  $a$  (promień zbiegu). Obraz w rzucie prostokątnym na tło tego promienia przecina  $t_v$  w punkcie  $Z_a^s$ , który jest śladem zbiegu prostej  $a$  w perspektywie kolinearnej na tło  $\tau$ , zaś łuk  $a^o$  w punkcie  $Z_a^o$  będącym śladem zbiegu prostej  $a$  w omawianej perspektywie niekolinearnej.

Wniosek 1.

Perspektywa dowolnej prostej  $a$  jest określona jednoznacznie, gdy dane są: rzut prostokątny na tło jej śladu znikania  $N_a''$  oraz ślad zbiegu  $Z_a^o$ .

Niech będzie dany aparat rzutowania jak w ustaleniu 2.1.1. oraz dowolna płaszczyzna  $\alpha$  (rys.3).

Definicja 3.

Śladem znikania płaszczyzny  $\alpha$  nazywamy jej krawędź z płaszczyzną znikania  $v$ .

Poprowadzimy płaszczyznę zbiegu  $\varepsilon // \alpha$  przechodzącą przez punkt  $S$ . Płaszczyzna  $\varepsilon$  przecina płaszczyznę znikania w krawędzi  $n_\varepsilon$  przechodzącej przez punkt  $S$  ( $S \in \varepsilon$ ). Wynika z tego, że łuk  $z_a^o$  (obraz prostej niewłaściwej płaszczyzny  $\alpha$ ) oparty jest na średnicy okręgu  $s^2$  zawartej w rzucie prostokątnym na tło śladu znikania  $n_\varepsilon$  płaszczyzny  $\varepsilon$ . Ponieważ płaszczyzna  $\alpha$  i jej płaszczyzna zbiegu  $\varepsilon$  są do siebie równoległe, równoległe są do siebie także ślady znikania  $n_\alpha$  i  $n_\varepsilon$ , i ich rzuty prostokątne na płaszczyznę tła.

Definicja 4.

Śladem zbiegu płaszczyzny  $\alpha$  nazywamy łuk okręgu  $z_\alpha^\circ$  powstały jako obraz w rzucie stereograficznym łuku okręgu wielkiego, stanowiącego przekrój sfery  $\chi^2$  płaszczyzną  $\varepsilon$  i leżącego przed płaszczyzną znikania  $v$ .

Wniosek 2.

Ślad zbiegu płaszczyzny  $z_\alpha^\circ$  i rzut prostokątny na tło śladu znikania  $n_\alpha''$  jednoznacznie określają położenie odwzorowywanej płaszczyzny w przestrzeni.

Przez punkt  $O$  prowadzimy płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do płaszczyzny tła i płaszczyzny  $\alpha$ . Wykonujemy kład płaszczyzny  $\gamma$  na tło  $\tau$ . Na rys.3 oznaczono:  $S^x$  - kład środka sfery  $S$ ;  $O^x$  - kład punktu  $O$ ;  $g^2$  - kład okręgu wielkiego stanowiącego przekrój sfery  $\chi^2$  płaszczyzną  $\gamma$ ;  $n_\gamma^x$  - kład krawędzi płaszczyzny  $\gamma$  i płaszczyzny znikania  $v$ .

Znajdujemy kład  $k^x$  krawędzi  $k = \gamma \cap \alpha$ . Prosta  $k^x$  powstała z połączenia punktu  $N_k^x = n_\gamma^x \cap n_\alpha''$  (kładu śladu znikania prostej  $k$ ) oraz punktu  $T_k$  - śladu tłowego tej prostej. Kąt  $\varphi = \angle k^x n_\gamma^x$  jest kątem nachylenia płaszczyzny  $\alpha$  do płaszczyzny znikania  $v$  i zatem także do tła.

Przez punkt  $S^x$  prowadzimy prostą  $m^x // k^x$  - kład krawędzi między płaszczyzną zbiegu i płaszczyzną  $\gamma$ :  $m = \varepsilon \cap \gamma$ . Punkt  $Z_m^x = m^x \cap \gamma''$  jest śladem zbiegu prostej  $m$  w perspektywie kolinearnej. Znajdujemy punkt  $Z_m^x$  powstały z przecięcia prostej  $m^x$  z okręgiem  $q^2$ . Punkt  $Z_m^o = (O^x Z_m^x) \cap \gamma''$  jest zaś śladem zbiegu tej prostej w perspektywie niekolinearnej. Zauważmy, że łuk  $z_\alpha^\circ$  przechodzi przez punkty przecięcia prostej  $n_\varepsilon''$  z okręgiem  $s^2$ . Istotnie: łuk ten powstał jak obraz w rzucie stereograficznym łuku koła wielkiego sfery  $\chi^2$  powstałego jako jej przekrój płaszczyzną  $\varepsilon$ , zatem przechodzącego przez punkty przecięcia  $n_\varepsilon$  z konturem sfery  $k^2$ . Proste rzutujące te punkty z punktu  $O$  pokrywają się w rzucie prostokątnym na tło z  $n_\varepsilon''$ . Znaleziony punkt  $Z_m^o$  stanowi trzeci punkt wyznaczający łuk  $z_\alpha^\circ$ .

Wykonane konstrukcje podstawowe oraz zastosowanie ich w konstrukcjach złożonych pozwalają na ocenę ich przydatności w praktyce.

Niezbędnym etapem pośrednim pewnych konstrukcji perspektywy niekolinearnej są konstrukcje rzutu środkowego.

W perspektywie niekolinearnej możliwe jest określenie punktu mierzenia prostej. Zastosowanie go jednak w praktyce, ze względu na stopień złożoności konstrukcji nie znajduje uzasadnienia.

Kreśląc perspektywę szerokokątną otrzymujemy obraz o zniekształconych proporcjach i kształtach, czytelny natomiast pod względem przestrzennego układu przedstawianych brył.

Ze względu na złożoność konstrukcji niezbędnych do wykreślenia perspektywy szerokokątnej szczególnie uzasadnione wydaje się opracowanie użytkowego programu komputerowego realizującego omawiane odwzorowanie. Analityczne zależności oraz algorytmy zamieszczone w pracy wskazują, że mógłby on pracować w oparciu o program kreślący perspektywę kolinearną.

## THE WIDE-ANGLE NONCOLLINEAR PERSPECTIVE

The paper contains a description of a construction of noncollinear perspective in which circular arcs are line images. The points of space which are in front of the plane parallel to the background and going through the center of the sphere are projected from the sphere center first onto the sphere surface and then from the sphere pole which is opposite to the point of tangency of the sphere and background plane onto the background.