

ZMODYFIKOWANE TWIERDZENIE MORLEY'A

Pamięci Profesora Edwarda OTTO (13.XI.1908-10.V.1986) poświęcam

W podręczniku HSM. Coxetera: *Introduction to Geometry* [1] znajduje się następujące twierdzenie Morley'a: *Trzy punkty przecięcia sąsiednich trójsiecznych kątów dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.*

Okazuje się, że podobną własność mają sąsiednie trójsieczne kątów zewnątrznych dowolnego trójkąta. Prawdziwe jest bowiem TWIERDZENIE:

Trzy punkty przecięcia sąsiednich trójsiecznych kątów zewnętrznych dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Dla dowodu tego zmodyfikowanego twierdzenia Morley'a uporządkujmy najpierw twierdzenia pomocnicze i poszerzmy określenie *środką okręgu stycznego do trzech prostych* podane w [1] 1.51.

Twierdzenia pomocnicze:

1. Jeśli trzy proste a , b , c tworzą trójkąt ABC , to istnieją dokładnie cztery punkty równoodległe od tych prostych: I , I_a , I_b , I_c , czyli środki okręgów stycznych do tych prostych, tworzące *czworokąt ortyczny*.

2. Trójkąt ABC jest *trójkątem przekątnym* powyższego czworokąta ortycznego $I I_a I_b I_c$.

Pierwsze zdanie wynika z [1] §1.5 i zdania 1.72 (por. ćwiczenie 4 po §1.7).

Drugie zdanie wynika wprost z definicji *punktu przekątniowego* podanej w § 1.7 [1].

3. Każdy z sześciu boków czworokąta ortycznego $I I_a I_b I_c$ jest dwusieczną kąta wewnętrznego lub zewnętrznego trójkąta ABC .

Położenie *środką okręgu stycznego* do trzech prostych na dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta ABC utworzonego przez te trzy proste charakteryzuje kąt, pod którym „widać” ten bok trójkąta, który ta dwusieczna przecina nie w wierzchołku.

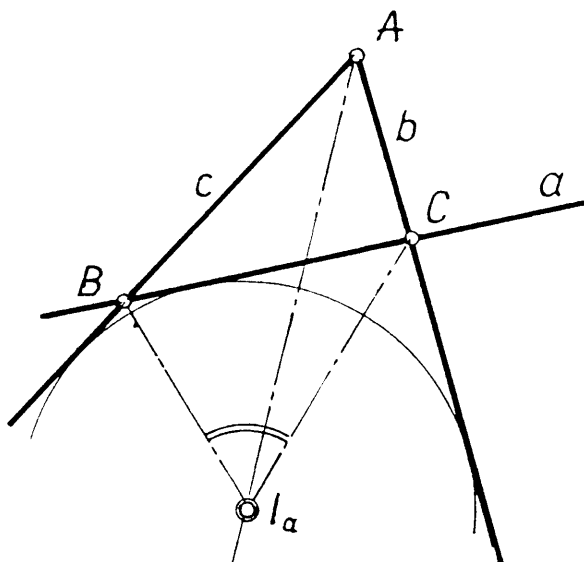
I tak z 1.51 [1] wynika następujące określenie *środką I* okręgu wpisanego w trójkąt ABC :

Punkt I jest takim punktem dwusiecznej kąta A w trójkącie ABC , że

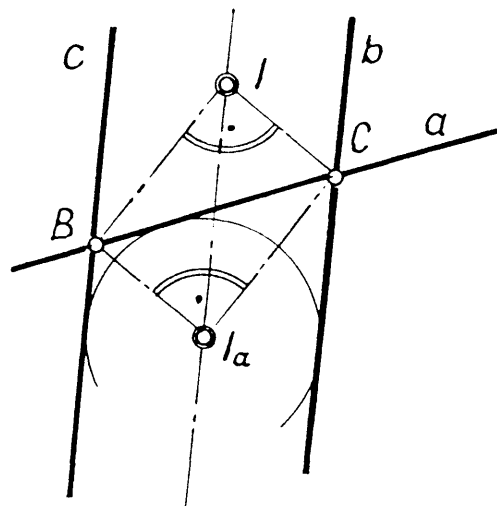
$$\angle BIC = 90^\circ + 1/2 A.$$

Pokażemy, że *środek I_a* okręgu wpisanego w zewnątrz trójkąta ABC jest takim punktem dwusiecznej kąta A w trójkącie ABC , że

$$\angle BI_aC = 90^\circ - 1/2 A. \quad (*)$$



Rys. 1a. Środek okręgu wpisanego w zewnątrz trójkąta ABC leży na dwusiecznej kąta A w takiej odległości, że
 $\angle BI_aC = 90^\circ - 1/2 A$ (*)



Rys. 1b. Środki okręgów stycznych do prostych a, b, c , z których $b \parallel c$, leżą na prostej równoodległej od prostych b, c w takiej odległości, że $\angle BIC = \angle BI_aC = 90^\circ$ (**)

Dowód: W dowolnym trójkącie ABC (Rys. 1a) kąt zewnętrzny przy wierzchołku B wynosi $A+C$, przy wierzchołku C : $A+B$. Zsumujmy kąty w trójkącie BCI_a :

$$\angle BI_aC + 1/2(A+C) + 1/2(A+B) = 180^\circ$$

Stąd po uwzględnieniu, że $A+B+C = 180^\circ$ mamy (*).

4. Jeśli proste a, b, c nie tworzą trójkąta, ponieważ dwie z nich np. b i c są wzajemnie równoległe, to istnieją dokładnie dwa punkty I, I_a równoodległe od tych prostych. Są to środki okręgów stycznych do prostych a, b, c .

5. Cztery proste łączące punkty I, I_a z punktami $B=ac$ i $C=ab$ tworzą prostokąt (w szczególnym przypadku kwadrat) i są dwusiecznymi kątów wierzchołkowych utworzonych przez proste a, b, c .

Punkty I i I_a , o których mowa w 4. i 5. można określić następująco:

Punkt $I (I_a)$ jest takim punktem prostej równoodległej od prostych równoległych b, c , że
 $\angle BIC = \angle BI_aC = 90^\circ$ (**)

Dowód: Kąty wierzchołkowe utworzone przez przecięcie prostych równoległych b, c prostą a są odpowiednio równe. Nazwijmy przez B i C parę kątów w odpowiednich wierzchołkach taką, że $B+C=180^\circ$. Proste b, c są ramionami kąta $A=0$. Prosta równoodległa od a, b jest dwusieczną tego kąta. Sumując kąty w trójkącie BIC mamy: $\angle BIC + 1/2 B + 1/2 C = 180^\circ$
 Stąd $\angle BIC = 90^\circ$.

Z sumy kątów w trójkącie BI_aC mamy:

$$\angle BI_aC + 1/2 (180^\circ - B) + 1/2 (180^\circ - C) = 180^\circ. \text{ Stąd również } \angle BI_aC = 90^\circ.$$

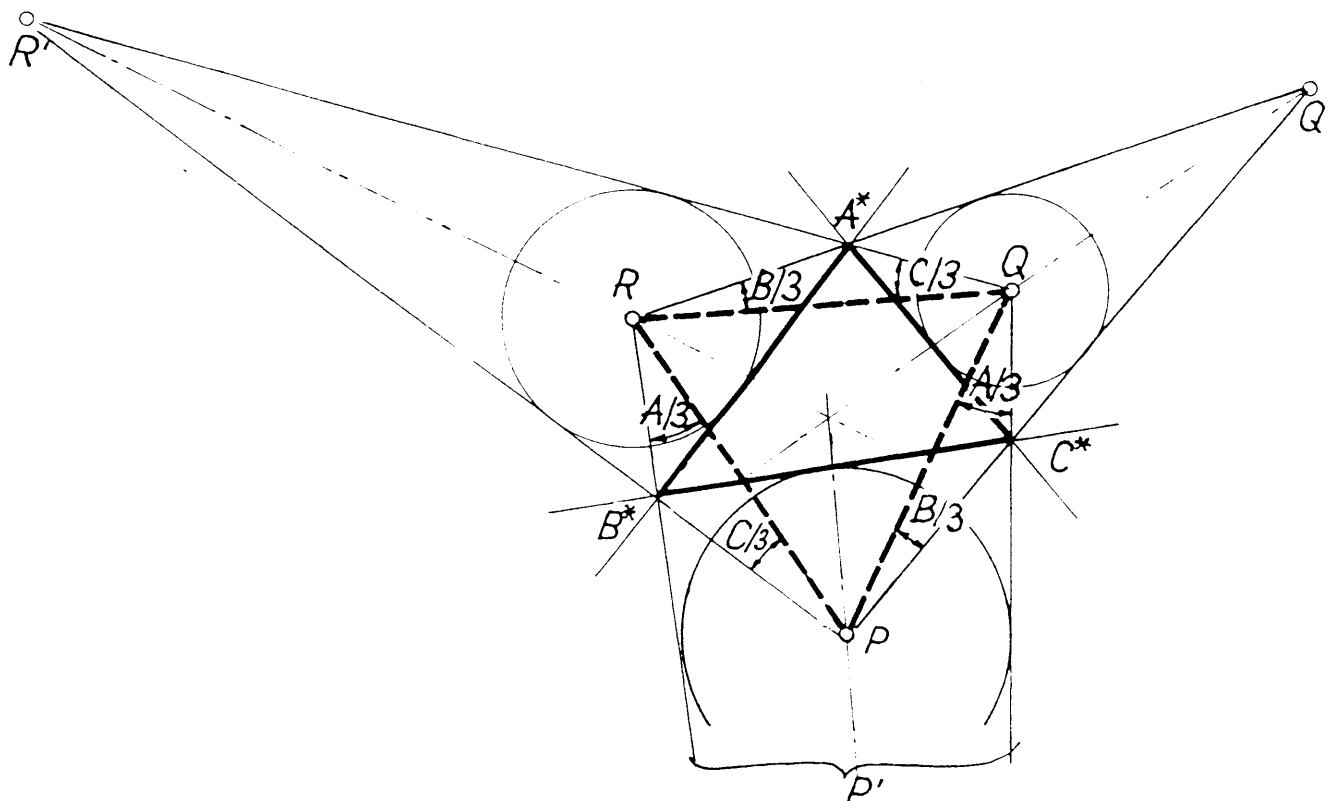
Co kończy dowód (**).

W modelu płaszczyzny rzutowej, który otrzymujemy przez dołączenie do płaszczyzny euklidesowej prostej w nieskończoności [3], można utożsamić przypadek prostych, omówionych w p. 4 i 5 z przypadkiem omówionym w p. 1-3. Jeden bok czworokąta ortycznego jest prostą niewłaściwą, na której leżą I_a'' i I_b'' oraz $A'' = bc$. Wierzchołki tego boku nie mają własności metrycznych.

Jeszcze wyraźniejszą spójność przypadku granicznego z ogólnym można doszukać się w modelu płaszczyzny inwersyjnej [2], który otrzymujemy przez dołączenie do płaszczyzny euklidesowej jednego punktu w nieskończoności.

A oto dowód zmodyfikowanego twierdzenia Morley'a dla dowolnego trójkąta ostrokątnego (Rys. 2), rozwartokątnego (Rys. 2a) i prostokątnego (Rys. 2b):

1. Niech będzie dany dowolny trójkąt **ostrokątny** ABC o kątach, których miary oznaczmy: A, B, C .



Rys. 2. Dany trójkąt ostrokątny ABC o miarach kątów A, B, C . Skonstruowany trójkąt $A^*B^*C^*$ jest podobny do danego.

Weźmy trójkąt równoboczny PQR i przy odpowiednich bokach tego trójkąta zbudujmy trójkąty QA^*R , RB^*P , PC^*Q (Rys. 2)

o kątach: $\angle PRB^* = \angle PQC^* = A/3$, $\angle QPC^* = \angle QRA^* = B/3$, $\angle RQA^* = \angle RPB^* = C/3$

Uwaga: Inny, dłuższy dowód zasugerował taką konstrukcję.

Aby udowodnić twierdzenie, wystarczy pokazać, że PB^* , PC^* , QC^* , QA^* , RA^* , RB^* są trójsiecznymi kątów zewnętrznych trójkąta $A^*B^*C^*$ oraz że ten skonstruowany trójkąt $A^*B^*C^*$ jest podobny do danego trójkąta ABC .

Oznaczmy przez P' punkt wspólny prostych QC^* i RB^* oraz odpowiednio Q' punkt przecięcia prostych RA^* , PC^* , R' - prostych PB^* , QA^* . Pary trójkątów: QRP i QRP' , RPQ i RPQ' , PQR i PQR' mają przy wspólnym boku odpowiedniej pary kąty równe. Np. w pierwszej parze trójkątów:

$$\angle QRP = \angle RQP = 60^\circ \quad \text{ i } \quad \angle QRP' = \angle RQP' = 60^\circ + A/3$$

i analogicznie w pozostałych.

Zatem proste PP' , QQ' , RR' są symetralnymi powyższych par trójkątów oraz ich kątów przy wierzchołkach P' , Q' , R' . Wielkości tych kątów można wyliczyć z wymienionych trójkątów równoramiennych. Np. z trójkąta QRP' mamy:

$$\angle P' = 180^\circ - 2(60^\circ + A/3) = 60^\circ - 2/3 A. \quad \text{ Czyli } 1/2 \angle P' = 30^\circ - A/3.$$

Z rys. 2 czytamy, że $\angle B^*PC^* = 60^\circ + B/3 + C/3$.

Ponieważ $A+B+C=180^\circ$ to $B/3 + C/3 = 60^\circ - A/3$, zatem

$$\angle B^*PC^* = 120^\circ - A/3 = 90^\circ + (30^\circ - A/3) = 90^\circ + 1/2 \angle P'$$

Stosując określenie środka okręgu wpisanego z [1] (1.51) dla trójkąta $P'B^*C^*$ stwierdzamy, że P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $P'B^*C^*$.

Wynika stąd równość kątów: $\angle PC^*P' = \angle PC^*B^*$, $\angle PB^*P' = \angle PB^*C^*$ oraz ich kątów wierzchołkowych np. $\angle PC^*P' = \angle QC^*Q'$.

$\angle PC^*P'$ jest kątem zewnętrznym trójkąta PQC^* a więc równy sumie kątów wewnętrznych do niego nie przyległych:

$$\angle PC^*P' = A/3 + B/3 = 60^\circ - C/3.$$

Przy założeniu, że wszystkie kąty trójkąta są ostre, wykazuje się analogicznie, że Q jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A^*C^*Q' a R środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A^*B^*R' .

Mamy więc $\angle QC^*Q' = \angle QC^*A^*$. Ten ostatni kąt równy jest swojemu wierzchołkowemu. Zatem wszystkie trzy kąty, na które został podzielony prostymi $PC^* = PQ'$ i $QC^* = QP'$ kąt zewnętrzny przy wierzchołku C^* trójkąta $A^*B^*C^*$ są równe (!)

Udowodniliśmy, że proste PC^* i QC^* są trójsiecznymi kąta zewnętrznego przy wierzchołku C^* trójkąta $A^*B^*C^*$.

Analogicznie wykazuje się, że proste QA^* i RA^* są trójsiecznymi kąta zewnętrznego trójkąta $A^*B^*C^*$ przy wierzchołku A^* a PB^* i RB^* trójsiecznymi kąta zewnętrznego przy wierzchołku B^* tego trójkąta.

Miara kąta zewnętrznego przy wierzchołku C^* trójkąta $A^*B^*C^*$ jest potrójną wartością miary $\angle PC^*P'$, która wynosi $60^\circ - C/3$, jak wyliczyliśmy wyżej. Mamy więc:

$$180^\circ - C^* = 3(60^\circ - C/3). \quad \text{ Stąd } C^* = C.$$

Ponieważ analogicznie $\angle RB^*R'$ jest kątem zewnętrznym trójkąta PRB^* , więc z rys. 2 czytamy: $\angle RB^*R' = A/3 + C/3 = 60^\circ - B/3$. Mamy więc:

$$180^\circ - B^* = 3(60^\circ - B/3). \quad \text{ Stąd } B^* = B.$$

Podobnie $\angle QA^*Q' = B/3 + C/3 = 60^\circ - A/3$ jako kąt zewnętrzny trójkąta QRA^* . Zatem $180^\circ - A^* = 3(60^\circ - A/3)$. Stąd $A^* = A$.

Wobec powyższej równości kątów udowodniliśmy, że skonstruowany trójkąt $A^*B^*C^*$ jest **podobny** do danego ostrokątnego trójkąta ABC .

2. Niech będzie dany dowolny trójkąt **rozwartokątny** ABC , którego miary kątów oznaczamy $A > 90^\circ$, B , C .

Konstrukcja trójkąta $A^*B^*C^*$ dla tych danych, opisana wyżej, przedstawiona jest na rys. 2a.

Punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w zewnątrz trójkąta $P'B^*C^*$. Istotnie, ponieważ $A/3 > 30^\circ$, to kąty zewnętrzne trójkąta QRP' są kątami rozwartymi: $\angle QRB^* = \angle RQC^* = 60^\circ + A/3 > 90^\circ$. Z sumy kątów tego trójkąta równoramiennego QRP' wyliczymy:

$$\angle P' = 180^\circ - 2[180^\circ - (60^\circ + A/3)] = 2/3 A - 60^\circ \quad \text{ czyli}$$

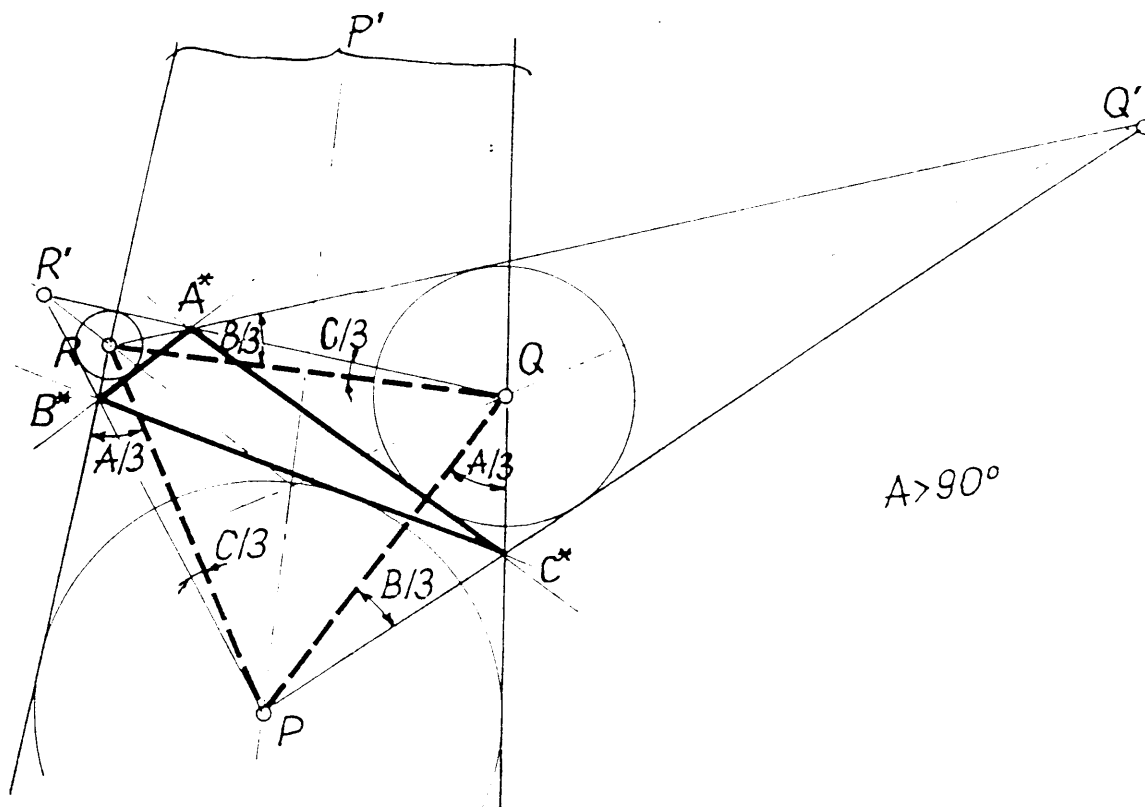
$$1/2 \angle P' = A/3 - 30^\circ.$$

(1)

Z rys. 2a czytamy: $\angle B^*PC^* = 60^\circ + B/3 + C/3$, co można zapisać biorąc pod uwagę, że $A+B+C=180^\circ$ oraz (1) następująco:

$$\angle B^*PC^* = 60^\circ + (60^\circ - A/3) = 90^\circ - (A/3 - 30^\circ) = 90^\circ - 1/2 \angle P'. \quad (2)$$

Prosta PP' jest symetralną kąta P' (ponieważ przechodzi przez wierzchołki dwóch trójkątów równoramiennych złączonych podstawami). Stąd i z (2) na podstawie (*) zastosowanego do trójkąta B^*C^*P' (por rys.1a) stwierdzamy, że P jest środkiem okręgu wpisanego w zewnętrznie trójkąta B^*C^*P' . Zatem proste $PC^*=PQ'$ i $PB^*=PR'$ są dwusiecznymi kątów zewnętrznych trójkąta B^*C^*P' przy wierzchołkach odpowiednio C^* i B^* .



Rys.2a. Dany trójkąt rozwartokątny ABC o miarach kątów $A > 90^\circ$, B , C . Skonstruowany trójkąt $A^*B^*C^*$ jest podobny do danego.

Dalej stwierdzamy, że punkt Q jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A^*C^*Q' , ponieważ QQ' jest dwusieczną kąta Q' a z (rys. 2a) widać, że mamy spełnione wymaganie (1.51) z [1] dla trójkąta PRQ'

$$\angle Q' = 180^\circ - 2(60^\circ + B/3) = 60^\circ - 2/3 B \text{ czyli } 1/2 \angle Q' = 30^\circ - B/3, \text{ a więc}$$

$$\angle A^*QC^* = 60^\circ + A/3 - C/3 = 60^\circ + (60^\circ - B/3) = 90^\circ + (30^\circ - B/3) \text{ czyli}$$

$$\angle A^*QC^* = 90^\circ + 1/2 \angle Q'.$$

Zatem $QC^*=QP'$ jest dwusieczną kąta A^*C^*Q' .

Wobec równości kątów wierzchołkowych wszystkie trzy kąty przy wierzchołku C^* , na które podzieliły proste QP' i PQ' kąt zewnętrzny trójkąta $A^*B^*C^*$ przy tym wierzchołku, są równe.

Wniosek: proste $QP'=QC^*$ i $PQ'=PC^*$ są trójsiecznymi kąta zewnętrznego przy wierzchołku C^* w trójkącie $A^*B^*C^*$.

Dalsza część dowodu jak dla trójkąta ostrokątnego.

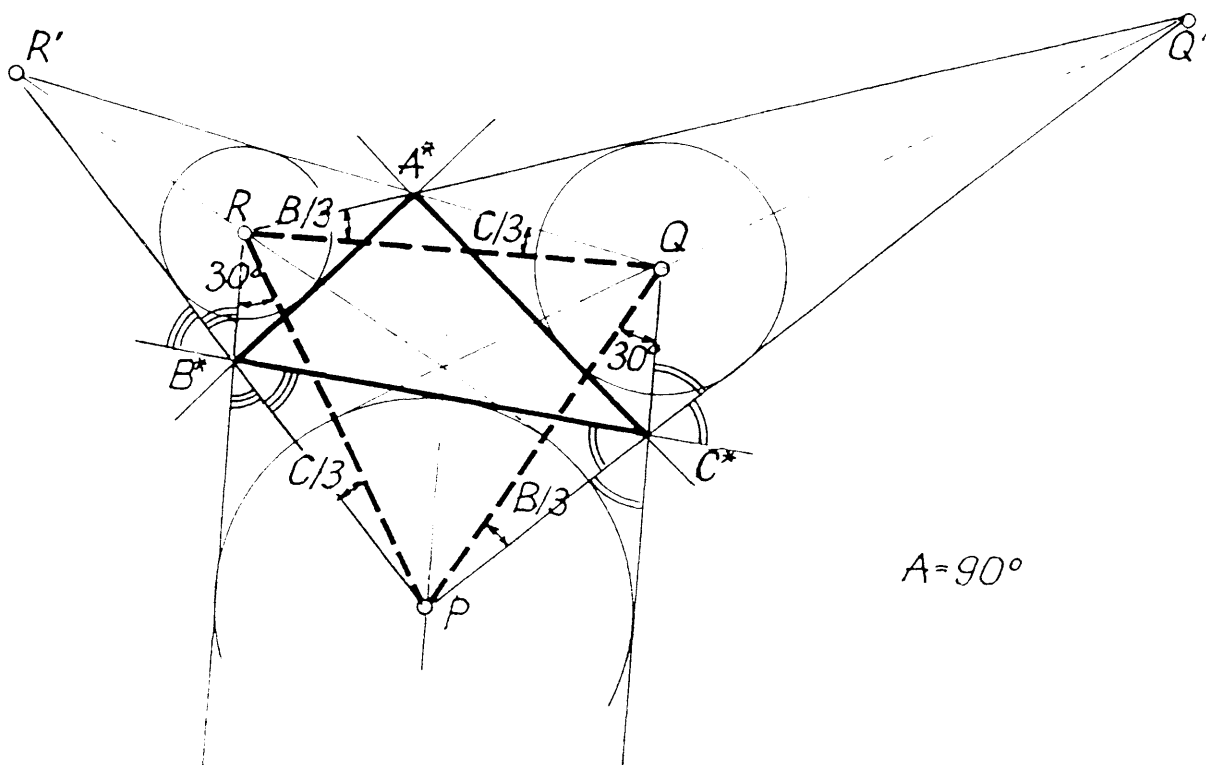
3. Niech dany będzie dowolny trójkąt **prostokątny** ABC o miarach kątów $A=90^\circ$, B , C .

Konstrukcja trójkąta $A^*B^*C^*$ dla tych danych przedstawiona jest na rys. 2b. Z rysunku widać, że $\angle QRB^* = \angle RQC^* = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Zatem proste QC^* i RB^* jako prostopadłe do boku QR są wzajemnie równoległe.

Wierzchołek P trójkąta PQR jest równoodległy od tych prostych równoległych. Na podstawie (**) możemy twierdzić, że P jest środkiem okręgu stycznego do prostych QC^* , RB^* , B^*C^* , ponieważ $\angle B^*PC^* = 90^\circ$. Istotnie z rys. 2a czytamy: $\angle B^*PC^* = 60^\circ + B/3 + C/3$ a jako, że w trójkącie prostokątnym $B+C=90^\circ$ czyli $B/3 + C/3 = 30^\circ$ stąd kąt, pod którym „widać” bok B^*C^* z punktu P jest kątem prostym.

Z faktu, że P jest środkiem okręgu stycznego do prostych QC^* , RB^* , B^*C^* wynika równość kątów przy wierzchołku C^* zaznaczonych podwójnym łukiem i równość kątów przy wierzchołku B^* zaznaczonych potrójnym łukiem.

Punkt Q jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A^*C^*Q' , co dowodzi się jak dla trójkąta ostrokątnego sprawdzając na rys. 2a, że spełniony jest warunek (1.51) z [1] co do $\angle A^*QC^* = 90^\circ + 1/2 Q'$ i przynależność Q do dwusiecznej kąta Q' . Analogicznie punkt R jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A^*B^*R' .



Rys.2b. Dany trójkąt prostokątny ABC o miarach kątów: $A=\pi/2$, B , C . Skonstruowany trójkąt $A^*B^*C^*$ jest podobny do danego.

Stąd prosta QC^* (i RB^*) jest dwusieczną kąta A^*C^*Q' (i odpowiednio A^*B^*R'). Mamy więc równość wszystkich trzech kątów przy wierzchołku C^* (i B^*), na które proste PC^* i QC^* (i odpowiednio RB^* i PB^*) podzieliły odpowiedni kąt zewnętrzny trójkąta $A^*B^*C^*$.

Udowodniliśmy więc, że proste te są trójsiecznymi odpowiednich kątów zewnętrznych zbudowanego trójkąta prostokątnego $A^*B^*C^*$. Dowód, że ten trójkąt jest podobny do danego ABC jest identyczny jak w poprzednich przypadkach.

Udowodniliśmy więc twierdzenie Morley'a dla kątów zewnętrznych dowolnego trójkąta, nazwane *zmodyfikowanym twierdzeniem Morley'a*.

Od Autorki: Powyższe twierdzenie i jego dowód ukazał się w materiałach poseminaryjnych ZAKŁADU GEOMETRII WYKREŚLNEJ POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ Zeszyt II z datą 1985.04.(na prawach rękopisu).

O zastosowaniach tego twierdzenia traktuje referat [4] i [5]. Konsekwencją tego twierdzenia jest opisany w artykule [6] trysektor trójkątny i konstrukcje pseudoklasyczne podziału kąta na trzy równe części.

Na konferencji organizowanej przez TU Graz (Austria): *GEOMETRIE TAGUNG: „107 Jahre Drehfluchtprinzip“* Vorau, 2-6.VI. 1997 autorka posłużyła się *trysektorem trójkątnym* jako jednym z trzech przykładów animacji konstrukcji geometrycznych [7]. Wspominając o genezie *trysektora trójkątnego*, zacytowała wymienione wyżej materiały poseminaryjne. Inny uczestnik tej konferencji O. Giering (TU München) w swoim referacie: *Perlen der Geometrie - Beispiele aus drei Jahrtausenden* wymienił twierdzenie Morley'a jako jedną z „perel”. Ta przypadkowa zbieżność jest motywacją do opublikowania powyższego dowodu.

LITERATURA CYTOWANA

- [1] **Coxeter HSM.** *Introduction to geometry*. Wiley & Sons, New York London, 1961.
Tłumaczenie: R. Krasnodębski: *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN Warszawa 1967.
- [2] **Coxeter HSM.** *Inversive Geometry*. Educational Studies in Mathematics 3 (1971) p.310-321. Dordrecht- Holland.
- [3] **Plamitzer A.** *Elementy geometrii rzutowej*. Jakubowski, Lwów 1927.
- [4] **Czech L.** *Zastosowanie zmodyfikowanego twierdzenia Morleya*. Materiały Konferencji naukowo-dydaktycznej Instytutu Matematyki PK, Janowice 1985.
- [5] **Czech L.** *Calculator aided classical constructions*. Proc. ASEE of 4th IC ECG DG, Miami 1991, p. 222 -225.
- [6] **Czech L.** *O trójkącie, trysekcji i trysektorze trójkątnym*. Wybrane zagadnienia geometrii wykreslnej. Monografia PK nr 115, Kraków 1991, p. 7-26.
- [7] **Czech L.** *Examples of geometrical construction animation* (w przygotowaniu do druku w materiałach pokonferencyjnych).

MODIFIED MORLEY'S THEOREM

Morley's theorem concerning the trisectors of **exterior** angles of any triangle, named *modified Morley's theorem*, states that

three points of intersection of the adjacent trisectors of the exterior angles of any triangle form an equilateral triangle.

It was proved by the author in 1985 on the Seminar of the Institut of Mathematics of CUT.

It is essential in the proof of the *modified Morley's theorem for an acute-angled triangle* (just as in the proof of Morley's theorem) to characterize the *incenter* I of a triangle ABC as lying on the bisector of the angle A at such a distance that $\angle BIC = 90^\circ + 1/2 A$. This angle describing the position of the incenter on the bisector had to be first found for *excenter* I_a of the triangle ABC as being :

$$\angle BI_aC = 90^\circ - 1/2 A \quad (*)$$

or for two centres I and I_a of circles tangent to the straight lines a, b, c among which $b//c$ as being:

$$\angle BIC = \angle BI_aC = 90^\circ \quad (**)$$

to prove the *modified Morley's theorem* for an obtuse-angled triangle or a right-angled triangle respectively.

The last case was the basis for invention of the *triangular trisector* described by the author in her later elaborations.