

## OBRAZY OKRĘGÓW W TZW. RZUCIE ZDEGENEROWANYM

Zawarty w niniejszym Biuletynie artykuł M.Paleja pt. "Degeneracja rzutni w metodzie Monge'a" przedstawia propozycje dotyczące odwzorowania przestrzeni za pomocą tzw. rzutu zdegenerowanego. Dysponując przydatnym do ilustracji przekształceń płaskich (a do takich można sprowadzić rzut zdegenerowany) programem CABRI można się pokusić o szczegółowszą analizę obrazów okręgów. Powtórzenie metody rozumowania M.Paleja może prowadzić do wniosku, że rzutem zdegenerowanym okręgu jest krzywa rzędu ósmego. Mamy bowiem następującą sytuację:

1. Dowolna prosta  $l$  przecina rzut zdegenerowany okręgu  $\omega$  w  $n$  punktach.  
Rozważmy praobraz okręgu  $\omega$ , którym jest konoida  $\Omega$  oraz praobraz prostej  $l$ , którym jest hiperbola  $\lambda$ .
2. Praobrazy  $\Omega$  i  $\lambda$  przy ogólnym ich położeniu mają osiem punktów wspólnych - są to bowiem punkty przecięcia hiperboli  $\lambda$  przez konoidę  $\Omega$ , która jak wiadomo jest powierzchnią rzędu czwartego.
3. Z liczby ośmiu punktów wspólnych  $\Omega \cap \lambda = P_{1,8}$  wnioskujemy, że istnieje osiem takich tworzących konoidy  $\Omega$ , których rzut zdegenerowany pokrywa się z punktami przecięcia krzywej  $\omega^z$  z prostą  $l$ . Wynika stąd jasno, że krzywa  $\omega^z$  jest rzędu ósmego.

Ilustracja obrazów okręgów w rzucie zdegenerowanym realizowana za pomocą programu CABRI (w adaptacji autorskiej) ujawnia jednak, że przy zróżnicowanych położeniach, prosta przecina krzywą  $\omega^z$  w czterech punktach. Nasuwałoby to podejrzenie, że krzywa taka jest rzędu czwartego. W analizie tego problemu wydają się być pomocne następujące uwagi:

Konstrukcja punktów krzywej  $\omega^z$  polega na odmierzaniu na poszczególnych promieniach pęku  $(X)$  takich odcinków, które wyrażają wysokości odpowiednich punktów okręgu  $\omega$ . Tej samej długości odcinki odmierza się na dwóch promieniach (oprócz promieni skrajnych, które jako zarys traktować można jako jednoczącą się parę promieni), co można zilustrować jako wynik przecięcia tych promieni przez odpowiedni okrąg o środku  $X$ . Krzywa  $\omega^z$  jest więc zbiorem punktów przecięcia okręgów  $\rho_i$  o środku  $X$  z odpowiednimi promieniami pęku prostych  $(X)$ .

Przyglądając się takiej konstrukcji można zauważyć, że krzywa  $\omega^z$  pokrywa się z rzutem części wspólnej dwóch powierzchni: konoidy  $\Omega$  okręgu  $\omega$  oraz obrotowej powierzchni stożkowej  $\Gamma$  o osi  $p_2$  i kącie rozwarcia  $\frac{\pi}{2}$  (płaszczyzny równoległe do rzutni  $\pi_1$  przecinają powierzchnię  $\Gamma$  w okręgach, których promienie są równe odległościom tych płaszczyzn od rzutni  $\pi_1$ ). Ale część wspólna powierzchni  $\Omega$  i  $\Gamma$  to zwyczajnie ich linia przenikania:  $c^8 = \Omega \cap \Gamma$  - krzywa rzędu ósmego.

Punkt  $X$  można traktować jako zdegenerowaną krzywą rzędu czwartego. Istotnie bowiem każda płaszczyna przechodząca przez  $X$  "przecina" go w czterech zjednoczonych punktach linii przenikania  $c^8$ : są to punkty przecięcia tworzących powierzchni stożkowej z podwójną tworzącą konoidy - prostą  $p_2$ . Wynika stąd, że każda płaszczyna wiązki  $(X)$  przecina pozostałą część linii  $c^8$  - krzywą, której prostokątny rzut na  $\pi_1$  pokrywa się z rzutem zdegenerowanym okręgu  $\omega$  - w czterech tylko punktach.

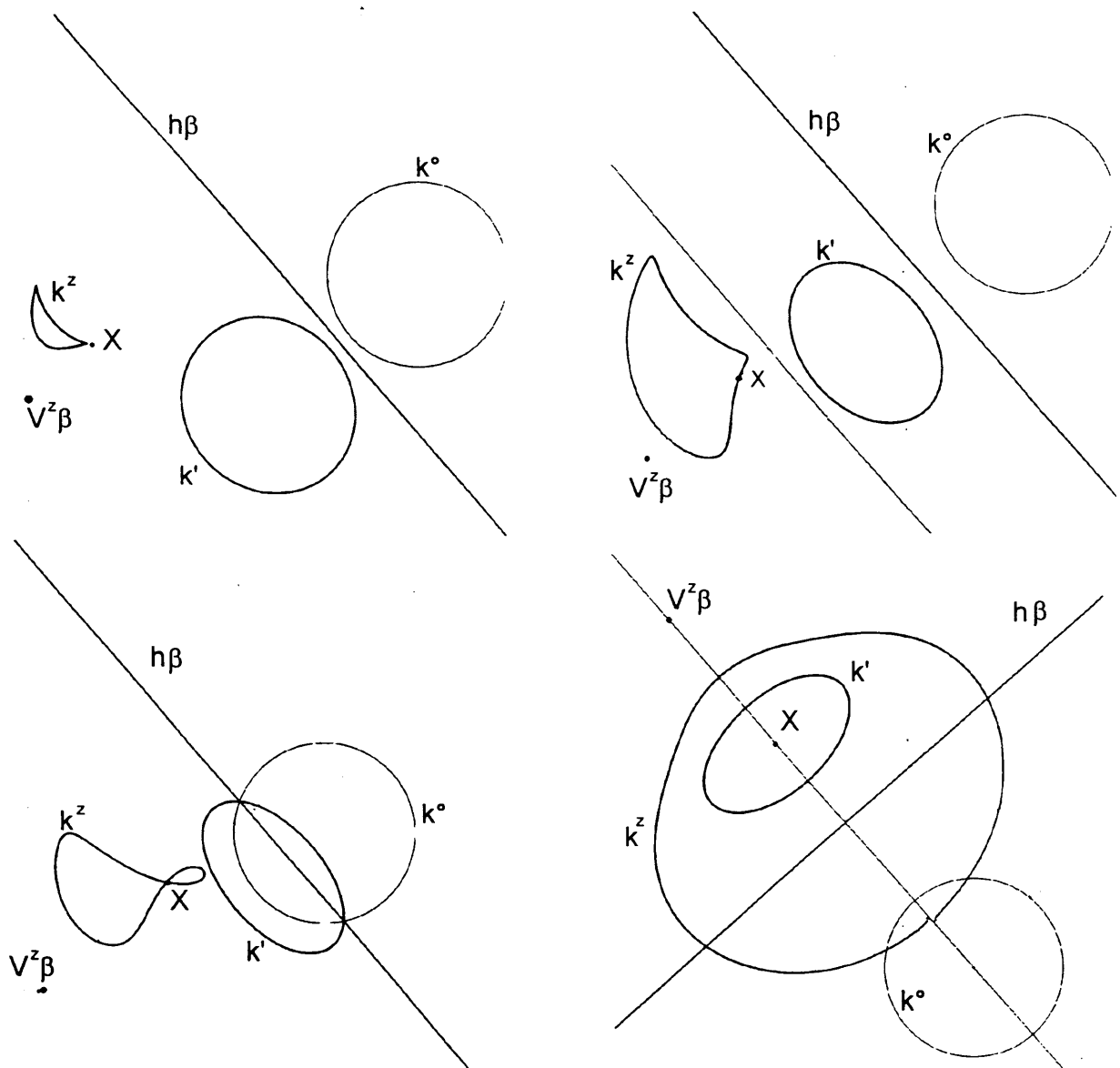


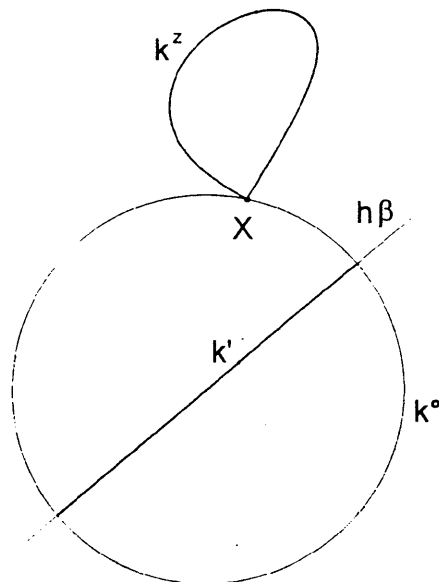
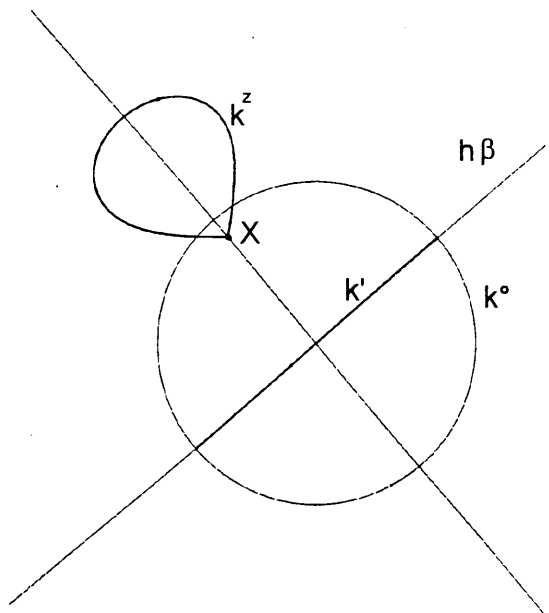
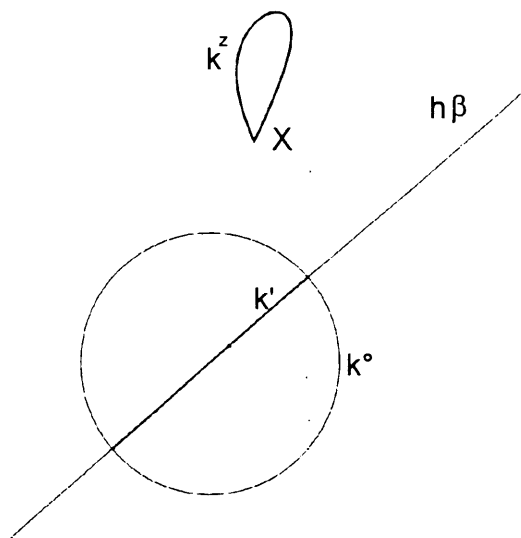
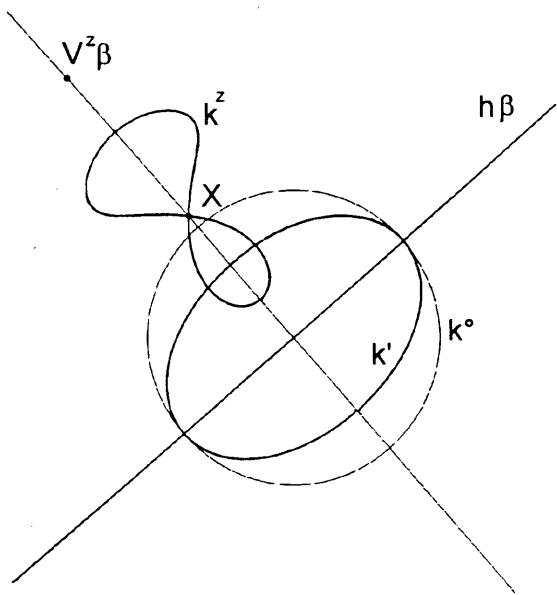
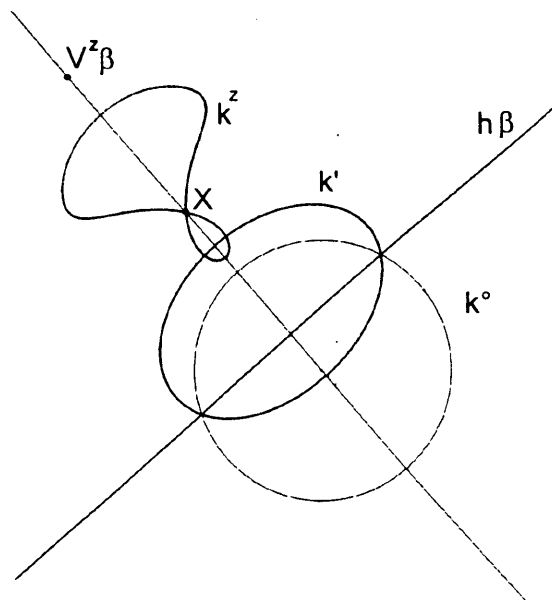
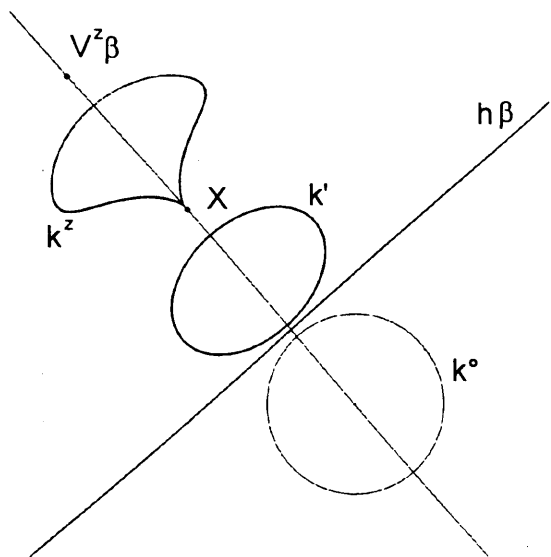
12/2/98

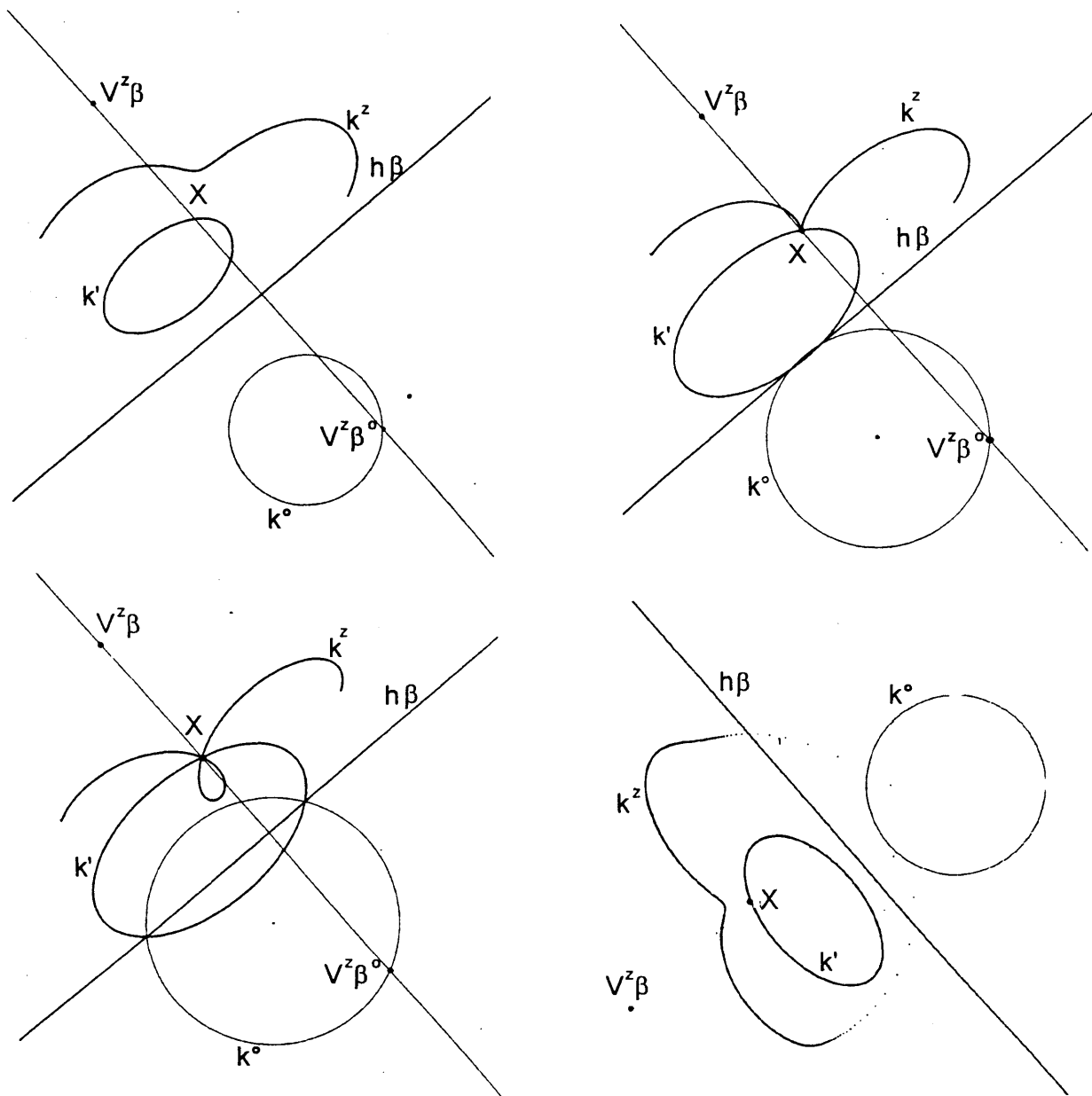
Można również dowieść że w czterech tylko punktach krzywą  $c^8$  przecina każda płaszczyzna równoległa do płaszczyzny okręgu - są to punkty przebicia powierzchni stożkowej  $\Gamma$  przez krzywe przekrojów konoidy tymi płaszczyznami, które jak wiadomo (1) są elipsami powinowatymi z okręgiem  $\omega$ .

Przedstawione okoliczności wydają się tłumaczyć wzrokową tendencję do kwalifikowania rzutu zdegenerowanego okręgu - krzywej  $\omega^z$  - jako krzywą rzędu czwartego. W rzeczywistości jednak taki jej charakter ma miejsce w szczególnym położeniu tego okręgu - w położeniu symetrycznym względem rzutni. Wówczas bowiem symetryczne względem  $\pi_1$  są: konoida okręgu  $\Omega$  oraz hiperbola przekroju powierzchni  $\Gamma$  dowolną płaszczyzną  $\Phi$  prostopadłą do rzutni  $\pi_1$ . W przypadku takim osiem punktów przebicia konoidy  $\Omega$  przez hiperbolę  $\lambda$  w rzucie prostokątnym na  $\pi_1$  parami się jednoczą. W rezultacie rzut płaszczyzny  $\Phi$  będący prostą  $\Phi'$  o dowolnie wybranym kierunku i położeniu przecina krzywą  $\omega^z$  w czterech punktach, co dowodzi, że jest to istotnie krzywa rzędu czwartego.

Poniżej zaprezentowano kilka obrazów okręgów w rzucie zdegenerowanym wybierając różne ich położenia. Symbolem  $\beta$  oznaczono płaszczyznę okręgu zaś  $V^z_\beta$  - rzut zdegenerowany "śladu pionowego" tej płaszczyzny. Ostatnie cztery przykłady obrazują przypadki, kiedy okrąg przecina "rzutnię"  $p_2$

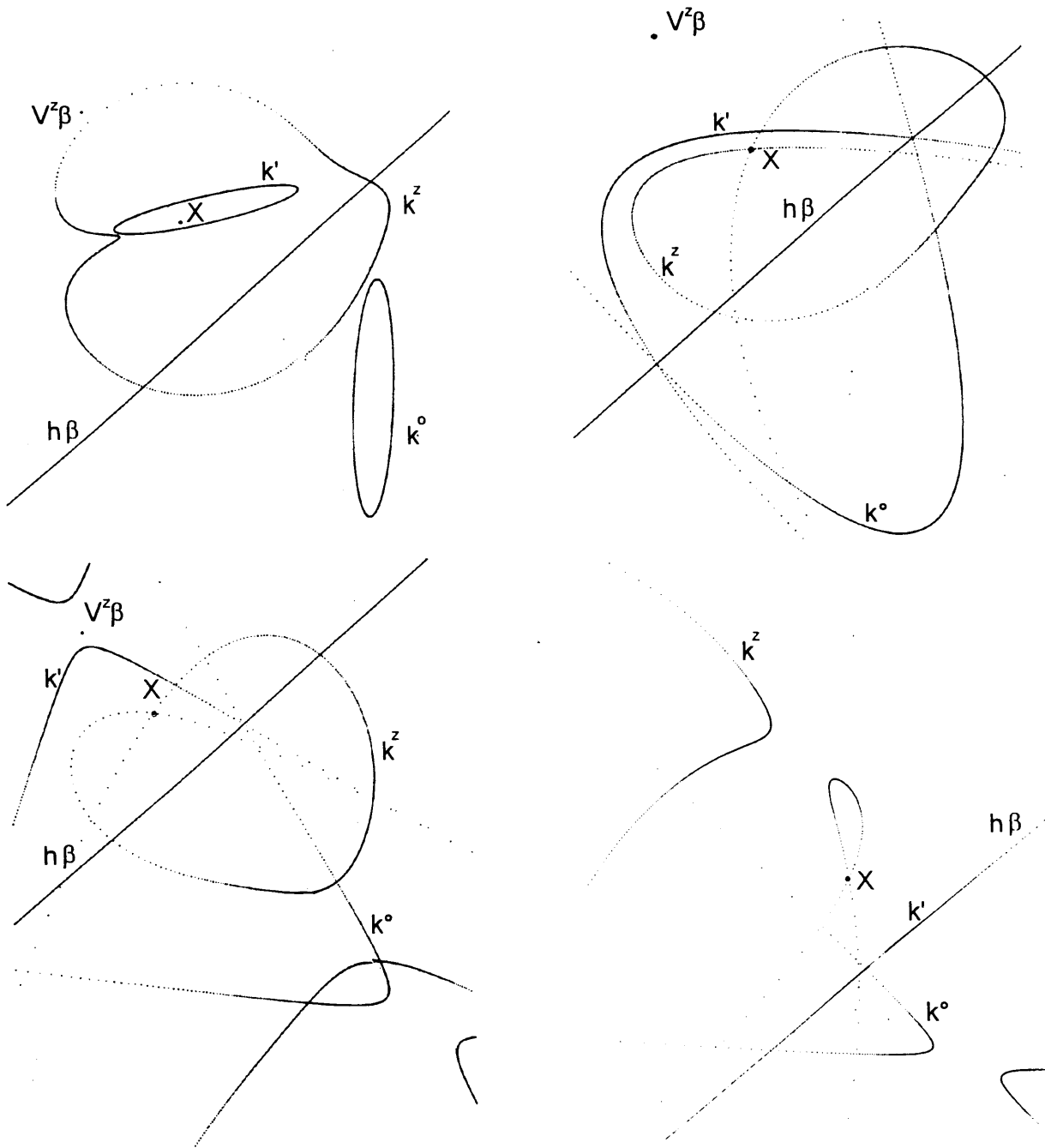






Warto zwrócić uwagę na punkty podwójne krzywej będącej rzutem "z" okręgu  $\omega$ . Występują one wówczas kiedy istnieją równoległe do  $\pi_1$  cięciwy okręgów przecinające się z  $p_2$  oraz w przypadku kiedy okrąg  $\omega$  przebija rzutnię  $\pi_1$ . Z pracy (1) wiadomo, że obraz "z" wszystkich punktów rzutni skupiony jest w punkcie  $X = p_2 \cap \pi_1$ . Tak więc jeżeli zachodzi:  $\omega \cap \pi_1 = I, II$  to  $I^z = II^z = X$

Kolejne rysunki przedstawiają rzuty zdegenerowane ogólnie położonych stożkowych. Jak można było przewidzieć rzut elipsy nie różni się zasadniczo od obrazów okręgu, natomiast w przypadku rzutu "z" paraboli krzywa  $\omega^z$  posiada jeden punkt niewłaściwy a w przypadku hiperboli - dwa punkty niewłaściwe. Jeżeli hiperbola leży w płaszczyźnie prostopadłej do rzutni  $\pi_1$  - obydwa jej punkty niewłaściwe w rzucie "z" jednoczą się z punktem niewłaściwym prostej  $\beta'$  stanowiącej rzut normalny hiperboli na  $\pi_1$ .



### THE IMAGES OF THE CIRCLES IN SO CALLED DEGENERATED PROJECTION

The problem of the images of the circles in a special case of Monge method is being discussed.

The authoress presents the reasoning suggesting that the circles in many positions are projected into the 4<sup>th</sup> order curves.

According to the position of the projected circle towards degenerated projection plane (a straight line) its image may have a cusp or a node.

When the circle intersects the degenerated projection plane its image includes one or two circles and a supplement - curve or the double counted lines line.