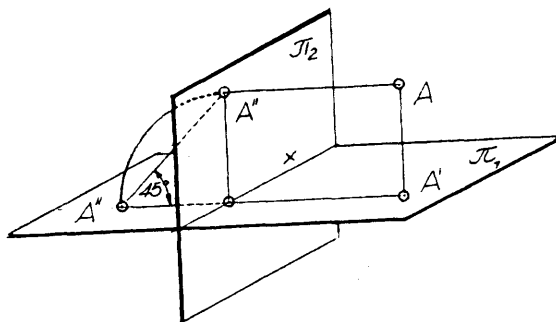


DEGENERACJA RZUTNI W METODZIE MONGE'A

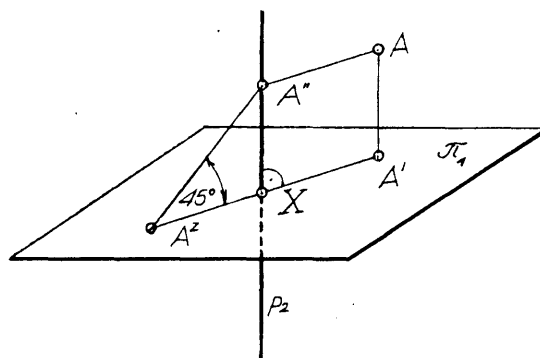
Tradycyjny wykład odwzorowania w metodzie Monge'a opiera się na tzw. sprowadzeniu układu przestrzennego rzutni do płaszczyzny rysunku. Konstrukcja taka, jak wiadomo, między innymi zakłada obrót jednej rzutni dookoła osi rzutów o kąt 90° . Zauważmy jednak, że obrót taki można pominąć zamiennie rozpatrując odpowiednio "załamany" jeden promień rzutujący (rys. 1). Jeżeli założyć, że rysunek płaski powstaje z położenia rzutni pionowej na płaszczyznę rysunku (czyli rzutnię poziomą), to wynikowo tę samą sytuację otrzymuje się przyjmując, że promień pionowo-rzutujący załamuje się w punkcie przebiecia π_2 i pod kątem 45° pada na rzutnię poziomą. Punkt wspólny tak załamane go promienia z rzutnią π_1 pokrywa się z obróconym rzutem pionowym rozpatrywanego punktu.



rys. 1

Należy oczywiście przy tym postawić dwa warunki: 1^o - obydwa promienie rzutujące (normalny, w kierunku prostym do rzutni π_1 i "załamany") leżą w jednej płaszczyźnie i 2^o - kąt załamania jest jednoznacznie ustalony. Zauważmy, że wchodzi w rachubę dwie możliwości - jeden z tych kierunków oferuje rozdzielanie (w sensie euklidesowym) rzutów punktów obszaru pierwszego przez oś x - drugi lokuje takie rzuty po jednej stronie tej osi. Jest oczywiste, że ogólnie przyjmowanej zasadzie rozwijania przestrzennego układu rzutni odpowiada kierunek pierwszy.

Mając na uwadze powyższe rozpatrzmy przypadek, w którym jedną z rzutni np. π_2 zastąpiono prostą $p_2 \perp \pi_1$ (rys. 2). Niech przy tym $p_2 \cap \pi_1 = X$. Jeżeli powtórzymy opisany sposób konstruowania rzutów otrzymujemy metodę, w której obrazem dowolnego punktu A jest para rzutów: A', A^z takich, że A' jest identyczny z rzutem poziomym w metodzie Monge'a, natomiast rzut A^z , w dalszym ciągu nazywany rzutem zdegenerowanym, spełnia następujące warunki: $A^z \in A'X$, $A^zX = \overline{AA'}$, a przy założeniu, że A należy do pierwszego lub drugiego obszaru, punkt X "euklidesowo" rozdziela parę $A'A^z$.



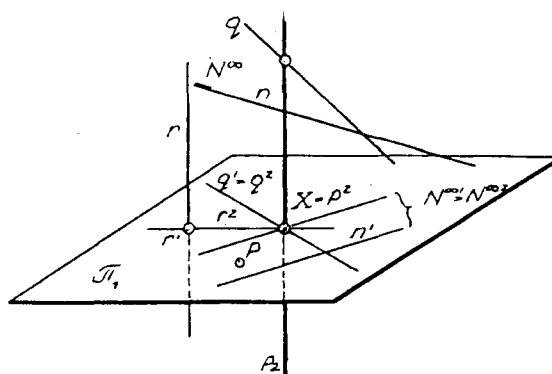
rys. 2

Jest widoczne, że tak zdefiniowana metoda odwzorowania ma cechę jedno-jednoznaczności w odniesieniu do ogólnie położonych punktów. W przypadku punktów szczególnych możemy zauważyć następujące relacje:

1). Rzuty zdegenerowane wszystkich punktów rzutni π_1 skupiają się w punkcie X ; punkt X jest tzw. rzutem skupionym punktów należących do π_1 (rys. 3)

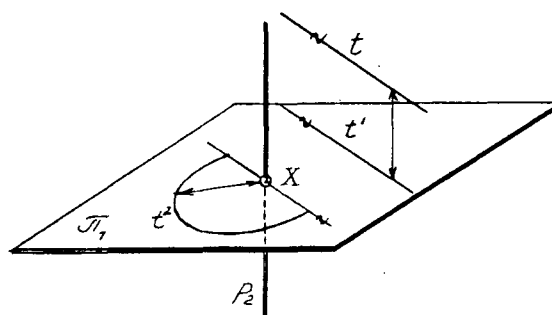
2). Rzut zdegenerowany punktu leżącego na "rzutni" p_2 jest rozciągły; tworzy go okrąg o środku X , którego promień jest równy wysokości punktu, a w przypadku punktu niewłaściwego P_2^∞ - prosta niewłaściwa rzutni π_1 . Punkty takie będziemy nazywali punktami osobliwymi.

3). Rzut zdegenerowany punktu niewłaściwego N^∞ dowolnej prostej n jest punktem niewłaściwym $N^{\infty z}$, identycznym z kierunkiem prostej n' . Wynika to z faktu, że niewłaściwym punktem N''^∞ jest równoległa do rzutni π_1 rzut tego punktu na p_2 .



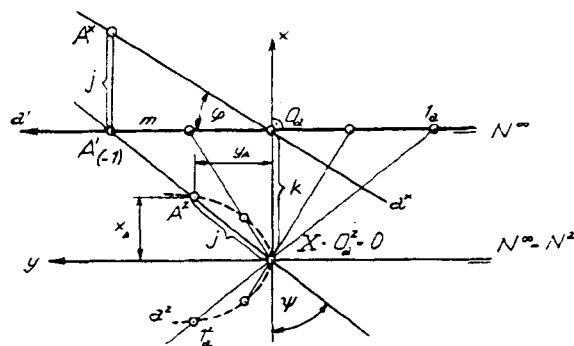
rys. 3

Zbadajmy jaki utwór jest rzutem "z" prostej. W przypadku szczególnych położów rozstrzygnięcie charakteru obrazu prostej jest trywialne. Tak więc np. jeżeli $q \cap p_2 \neq \emptyset$ tj. jeżeli dana prosta przecina "rzutnię" p_2 wówczas rzut zdegenerowany wszystkich jej punktów nieosobliwych zawiera się w rzucie normalnym, prostokątnym, tj $q' \in q^z$, a dokładniej - jest parą różnych półprostych o wspólnej podstawie q' . Dotyczy to również przypadku równoległości: $r \parallel p_2$, w którym $r^z = r'$ czyli obydwie półproste uzupełniają się do prostej r' . Szczególny i łatwy do skonstruowania obraz prostej ma miejsce wówczas



rys. 4

kiedy jest ona równoległa do rzutni (rys.4). Jeżeli bowiem każdy punkt takiej prostej ma tę samą wysokość - rzuty "z" wszystkich jej punktów są jednakowo odległe od X , a to oznacza, że zdegenerowanym rzutem prostej poziomej jest półokrąg. Półokrąg ten degeneruje się do pary symetrycznych względem X punktów gdy prosta pozioma przecina się z rzutnią p_2 . Można ustalić, że rzutem wszystkich nieosobliwych punktów półprostej poziomej, której początek należy do p_2 jest punkt.



rys. 5

Rozważmy dowolną prostą a , którą dla ułatwienia przyjmijmy jako daną w rzucie cechowanym na π_1 (rys. 5). Skonstruujmy obraz "z" szeregu punktów leżących na prostej $l_a, \theta_a, -l_a$. Jest widoczne, że punkty $l^z, \theta^z, -l^z$ leżą na krzywej a^z która: 1) przechodzi przez punkt $X = p_2 \cap \pi_1$ będący obrazem punktu prostej o zerowej wysokości (jej śladu poziomego), 2) posiada jeden punkt niewłaściwy - jest nim obraz "z" niewłaściwego punktu N^∞ prostej a zjednoczony z niewłaściwym punktem rzutu a' .

Zbadajmy charakter krzywej a^2 . Przyjmując układ osi współrzędnych w ten sposób by: $O = X$; $y // a'$; $x \perp y$ i rozpatrując współrzędne dowolnego punktu A^2 krzywej a^2 możemy wyprowadzić równania:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = j^2 \quad (2)$$

gdzie:

$$j = m \operatorname{tg} \varphi ; m = k \operatorname{tg} \psi \quad (3)$$

$$j = k \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi \quad (4)$$

Dla danych założeń odnośnie prostej a kąt φ jest stały, wobec czego mamy:

$$j = c \operatorname{tg} \psi \quad (5)$$

gdzie c jest pewną stałą wielkością wynikającą z przyjętych założeń graficznych. Wzór (5) traktować można jako równanie krzywej stanowiącej rzut "z" prostej a we współrzędnych biegunowych. Wielkość j jest wówczas długością promienia wodzącego, a kąt ψ tzw. amplitudą.

Uwzględniając relacje (1), (4), i (5) w równaniu (2) otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 = c^2 \frac{y^2}{x^2} \quad (6)$$

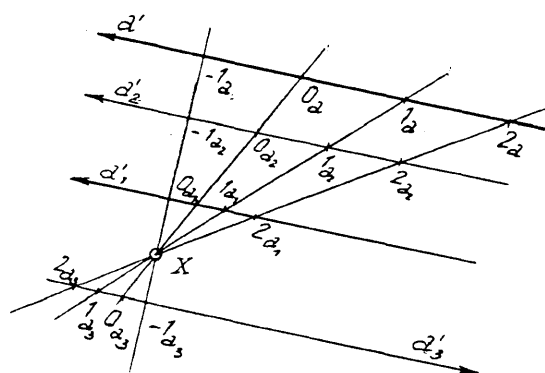
Ze wzoru tego wynika twierdzenie, że rzutem zdegenerowanym dowolnej prostej a jest krzywa rzędu czwartego. Wniosek powyższy potwierdzimy w dalszym ciągu rozważaniami o charakterze ściśle geometrycznym wykorzystując następujące uwagi i twierdzenia:

Tw.1.

Zdegenerowany rzut ogólnie położonej prostej a - krzywa a^2 jednoczy się ze zdegenerowanymi rzutami prostych zbioru $\{\alpha\}$, którego planem warstwicowym jest pęk prostych o środku X , a rzutem normalnym na π_1 jest pęk prostych równoległych do a' (rys. 6), leżących po tej samej stronie punktu X .

Prawdziwość twierdzenia wynika z własności rzutu zdegenerowanego, który, jak wspomniano, wszystkim nieosobliwym punktom półprostej poziomej przecinającej "rzutnię" p_2 przyporządkowuje jeden wspólny obraz "z". Zjednoczeniu ulegają rzuty zdegenerowane punktów o tych samych wysokościach, leżących na poszczególnych prostych zbioru $\{\alpha\}$, a w rezultacie każda prosta tego zbioru może być praobrazem zdegenerowanego rzutu a^2 .

Można zauważyć, że proste należące do zbioru $\{\alpha\}$ należą do jednej rodziny tworzących paraboloidy hiperbolicznej jako takie, które ślizgając się po dwóch skośnych liniach warstwowch np. $1_{a1}1_{a2}$, $2_{a1}2_{a2}$ (rys. 6) pozostają równoległe do płaszczyzny κ prostopadłej do π_1 i równoległej do a . Rzutnia π_1 i płaszczyzna



rys. 6

κ są płaszczyznami kierowniczymi tej powierzchni, a linie warstwowe zbioru $\{\alpha\}$ - stanowią drugą rodzinę jej tworzących. Prawdziwe jest więc:

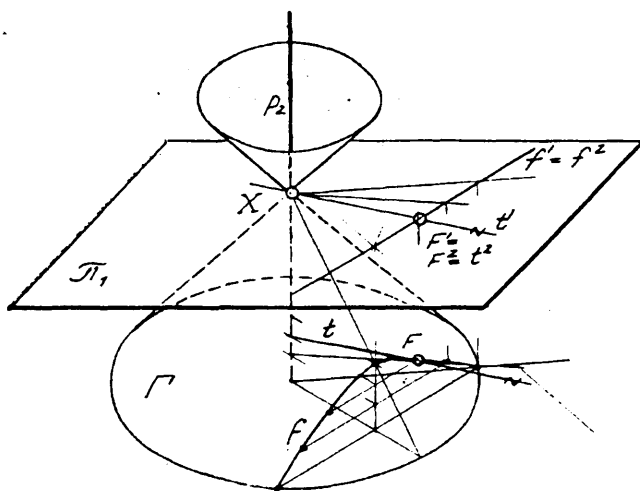
Tw.2.

Praobrazy zdegenerowanego rzutu ogólnie położonej prostej są tworzącymi paraboloidy hiperbolicznej.

Postawmy kolejne pytanie dotyczące praobrazów w rozpatrywanym rzucie zdegenerowanym. Co może być praobrazem prostej? Aby odpowiedzieć na to pytanie sięgnijmy do zbioru szczególnych punktów - punktów, których obydwa rzuty, tj, rzut prostokątny na π_1 i zdegenerowany "z" ulegają zjednoczeniu. Nie trudno zauważyć, że zbiór taki wypełnia powierzchnię, a dokładniej półpowierzchnię stożkową obrotową Γ o osi p_2 , wierzchołku X i kącie rozwarcia równym $\frac{\pi}{2}$. Taką bowiem powierzchnię tworzą proste (dokładniej: półproste) przechodzące przez X i nachylone do rzutni π_1 pod kątem 45° , których każdy punkt jest jednakowo odległy od rzutni π_1 i p_2 . Przypomnijmy, że w metodzie Monge'a rolę powierzchni Γ odgrywa płaszczyzna dwusieczna obszaru II i IV.

Rozpatrzmy figurę, której obydwa rzuty ulegają zjednoczeniu i są prostą $f' = f^z$ (rys.7). Zgodnie z powyższymi uwagami figura taka należy do Γ , przy czym jej rzutem normalnym, "prostokątnym" jest prosta. Oryginał f jest więc przekrojem powierzchni Γ przez płaszczyznę $\Phi \in f$, $\Phi \perp \pi_1$, czyli hiperbolą równoboczną.

Z powyższego rozumowania wynika, że praobrazem prostej f^z jest hiperbola f . Jest to jednak praobraz nie jedyny. Zauważmy, że rzut "z" każdej prostej poziomej t przecinającej p_2 i przechodzącej przez dowolnie wybrany punkt F hiperboli f przynależy do f^z (dokładniej: punkt F^z jest rzutem zdegenerowanym odpowiedniej półprostej poziomej z "wyklutym" punktem osobliwym). Tak więc jeśli rozważyć



rys. 7

zbiór $\{\Phi\}$ takich prostych, to można stwierdzić, że rzut zdegenerowany zbioru $\{\Phi\}$ jednoczy się z prostą $f' = f^z$, czyli, że praobrazy prostej f należą do zbioru $\{\Phi\}$. Zauważmy przy tym, że $\{\Phi\}$ jest powierzchnią prostokreślną, której tworzące spełniają następujące warunki:

- 1) są równoległe do π_1 ,
- 2) przecinają hiperbolę f ,
- 3) przecinają prostą p_2 .

Powierzchnia $\{\Phi\}$ została zatem utworzona przez ruch prostej ślizgającej się po dwóch prostych skośnych p_2 i t^∞ (gdzie t^∞ jest niewłaściwą prostą rzutni π_1) oraz po krzywej stopnia drugiego - hiperboli f . Wiadomo, że powierzchnia taka jest konoidą, czyli powierzchnią rzędu czwartego (1). Wynika stąd:

Tw.3.

Praobrazy figur, których rzutem zdegenerowanym jest dowolna prosta nieprzynależna do X tworzą konoidę hiperboli (równobocznej), będącej przekrojem powierzchni stożkowej Γ płaszczyzną równoległą do p_2 .

Uwzględniając twierdzenia 1 i 3 możemy ustalić rząd krzywej stanowiącej rzut zdegenerowany a^z ogólnie położonej prostej a . W tym celu w płaszczyźnie π_1 obierzmy dowolną prostą l^z i postawmy problem liczby punktów, w których prosta l^z przecina krzywą a^z . Rozważmy praobrazy krzywej a^z i prostej l^z . Są nimi: paraboloida hiperboliczna α (por. tw.2) oraz konoida Φ . Linia przenikania tych powierzchni: $c = \alpha \cap \Phi$ jest zbiorem takich punktów których rzut zdegenerowany należy jednocześnie do krzywej a^z oraz prostej l^z i rozstrzyga kwestię rzędu a^z . Co można powiedzieć o linii przenikania powierzchni α i Φ ? Jako część wspólna powierzchni rzędu drugiego i czwartego - jest ona krzywą rzędu ósmego. W rozpatrywanym przypadku krzywa ta ulega degeneracji. Jednym z jej elementów jest para prostych p_2 i t^∞ należących z założenia do obydwu powierzchni, przy czym są to proste podwójne konoidy Φ . Pozostała krzywa rzędu czwartego przechodzi między innymi przez te punkty, w których należąca do konoidy Φ hiperbola f przebija paraboloidę hiperboliczną α . Punkty takie są cztery (uwzględniając ewentualne rozwiązania urojone): $f \cap \alpha = 1, 2, 3, 4$. Jeżeli przez punkty $1, 2, 3, 4$ poprowadzimy proste l_1, l_2, l_3, l_4 przecinające "rzutnię" p_2 i równoległe do π_1 , tj. przecinające jednocześnie t^∞ , zauważymy, że są to jednocześnie tworzące paraboloidy α i konoidy Φ uzupełniające linię przenikania c . Rzuty zdegenerowane tworzących l_{1-4} są punktami $l_1^z, l_2^z, l_3^z, l_4^z$ leżącymi jednocześnie na krzywej a^z i prostej l^z ^{1/}. Możemy więc ustalić, że ogólnie przyjęta prosta l^z przecina zdegenerowany rzut ogólnie położonej prostej a - krzywą a^z w czterech punktach, co potwierdza wniosek dotyczący rzędu tej krzywej wyprowadzony wcześniej z rozważań analitycznych i dowodzi:

Tw. 4.

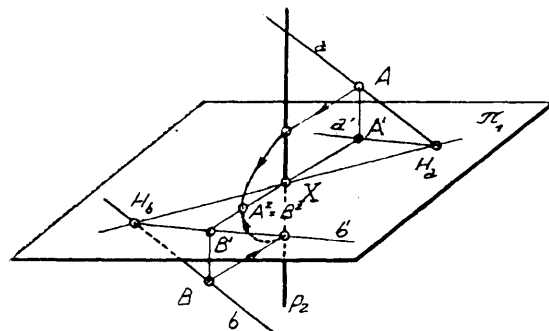
Zdegenerowany rzut ogólnie położonej prostej jest krzywą rzędu czwartego.

Pozostawiając otwartą sprawę obrazów bardziej złożonych figur zwróćmy jeszcze uwagę na następujące relacje:

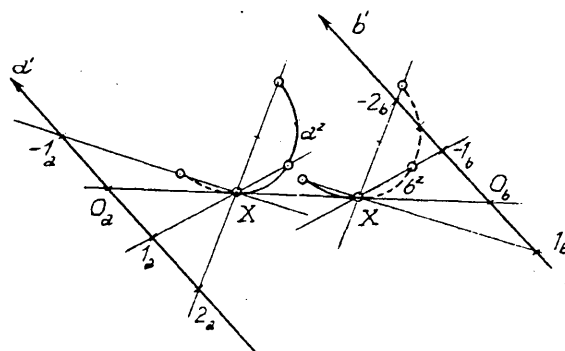
1. Jest widoczne, że równoległe do siebie proste, położone symetrycznie względem punktu X (rys. 8) będą miały zjednoczone rzuty zdegenerowane. Wynika to z symetrii odowiadających sobie punktów np. A i B oraz jednakowych ich wysokości z pominięciem znaków. Wobec przyjętej umowy - $A^z = B^z$ i konsekwentnie $a^z = b^z$.

Dla graficznego odróżnienia takich prostych można wprowadzić zasadę, zgodnie z którą łuki krzywych będących rzutami elementów o wysokościach dodatnich (leżących nad rzutnią π_1) będą rysowane linią ciągłą, natomiast te, których wysokości są ujemne - linią przerywaną. Odnośny przykład przedstawia rysunek 9

2. Obrazy prostych równoległych przechodzą przez wspólny punkt niewłaściwy promienia



rys. 8



rys. 9

^{1/} dokładniej wniosek taki dotyczy odpowiednich "półtworzących", tj. półprostych konoidy Φ leżących po tej samej stronie punktu X co hiperbola f .

pęku (X) równoległego do rzutów normalnych tych prostych - rys.10. Ponadto, jeżeli równoległe do siebie proste leżą w jednej płaszczyźnie prostopadłej do π , np. a, b , na rysunku 11 - wówczas zdegenerowany rzut jednej z nich np: b^z można traktować jako "przesunięty środkowo" rzut drugiej - a^z , powstaje on bowiem poprzez odłożenie na każdym promieniu pęku (X) tej samej długości odcinka, który wyraża różnicę wysokości punktów prostych na promieniach poimono-rzutuujących.

Zauważmy jeszcze przy okazji, że prosta łącząca punkt X ze śladem prostej jest styczna do rzutu zdegenerowanego prostej w punkcie $X(XO_a, XO_b$ - rys.11)

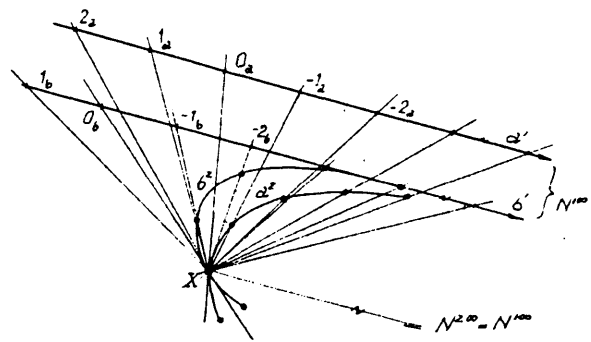
3. Obraz prostych przecinających się charakteryzuje się tym, że punkty przecięcia ich jednoimiennych rzutów są współliniowe z X ; należy przy tym zauważyć, że warunek współliniowości takich punktów jest warunkiem koniecznym do tego aby proste były w położeniu nieskośnym, ale nie wystarczającym. Można sobie wyobrazić proste skośne, których rzuty spełniają powyższy warunek. Wystarczy w tym celu wziąć pod uwagę jako jedną z nich prostą, która przecina się z p_2

4. Przypadek prostopadłości prostych przy ich ogólnym położeniu względem obydwu rzutni nie wykazuje żadnych prawidłowości. Jedynie przy założeniu szczególnego położenia co najmniej jednej z prostych względem π_1 (a tym samym i względem p_2) można wskazać na zachowanie się w rzutach pewnej cechy pozwalającej na wnioskowanie o prostopadłości prostych. W szczególności: (rys. 12)

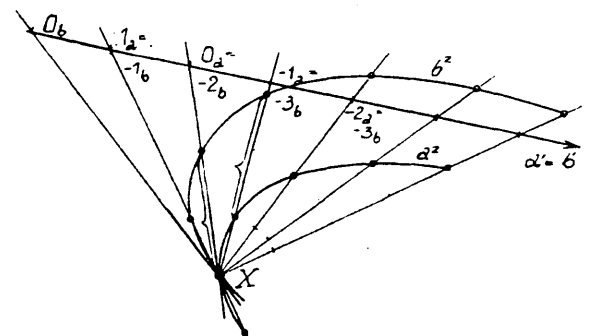
- jeżeli $a \perp b$ i $a \parallel \pi_1$ wówczas punkt niewłaściwy krzywej b^z oraz średnica ograniczająca półokrąg a^z ustalają kierunki wzajemnie prostopadłe,
- jeżeli $a \perp b$ i $a \perp \pi_1$ tj $a \parallel p_2$ wówczas jednocześnie zachodzi $b \parallel \pi_1$ i w efekcie rzut zdegenerowany takich prostych stanowią: prosta a^z przechodząca przez X oraz dowolnie względem niej położony półokrąg b^z .

5. Odwzorowanie płaszczyzny.

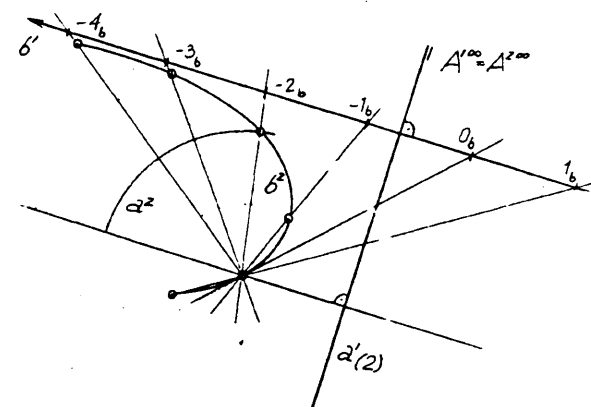
Najprostszy sposób odwzorowania płaszczyzny α polega na podaniu obrazów dwóch prostych: śladu poziomego h_α oraz linii spadu s przecinającej się z "rzutnią" p_2 . Zauważmy, że rzut "z" śladu H_s jest punktem



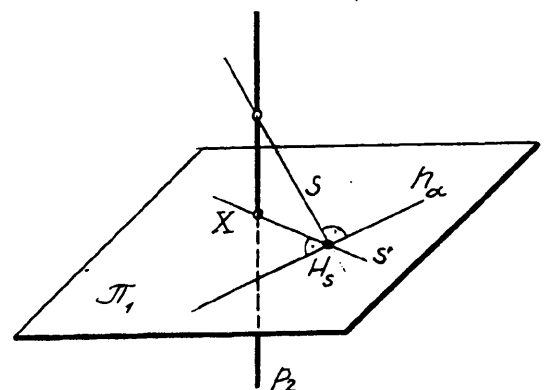
rys.10.



rys. 11



rys. 12



rys. 13

X a prosta spad s spełnia warunek $s' \perp h_a$. Elementy powyższe określające położenie płaszczyzny pozwalają na wnioskowanie o wzajemnym położeniu dwóch płaszczyzn (równoległe, prostopadłe) w oparciu o konstrukcje znane z metody Monge'a.

6. Na koniec rozważmy możliwość uogólnienia rozpatrywanej metody odwzorowania. Można założyć, że "rzutnia" p_2 jest w położeniu ogólnym względem π_1 , tj. że zachodzi: $\angle(p_2, \pi_1) \neq \frac{\pi}{2}$.

W takim przypadku przytoczony sposób rozumowania i wynikające zeń konstrukcje można powtórzyć zachowując jedynie warunek równoległości kierunku rzutu na π_1 do prostej p_2 i odpowiednie, indywidualne załamanie promienia rzutującego na p_2 (rys. 14). W miejsce rzutu prostokątnego mielibyśmy wówczas do czynienia z rzutem równoległym na π_1 w kierunku $k \parallel p_2$. Konsekwencją takiego założenia byłaby zmiana powierzchni stożkowej Γ odgrywającej w konstrukcji rolę szczególną. Byłaby to wówczas powierzchnia stożkowa nieobrotowa, której tworzące leżące w poszczególnych płaszczyznach pęku (p_2) są jednakowo nachylone do krawędzi tych płaszczyzn z π_1 oraz do prostej p_2 .

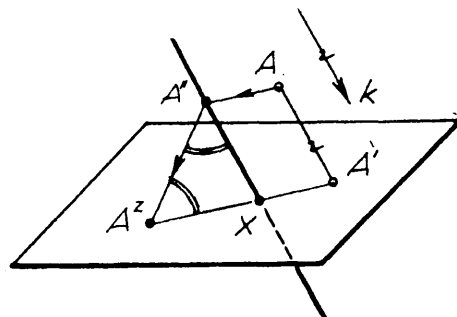
Zwróćmy uwagę na to, że rezygnując z warunku by w rozważanej metodzie odległość rzutów "z" punktów była równa ich wysokości a dopuszczając odczytywanie ich w pewnej skali np. redukującej je do połowy (co można uzyskać wprowadzając załamanie promienia nie o kąt 45° lecz nieco większy od 60° , taki by $\text{ctg } \varphi = 1/2$) również możemy powtórzyć opisane wyżej konstrukcje. W konsekwencji takiej zmiany rzut "z" dowolnej prostej byłby krzywą środkowo-podobną do tej, którą rozpatrzono dla wyjściowych założeń, a charakterystyczna powierzchnia Γ uległaby zmianie wynikającej z zmniejszenia bądź zwiększenia jej kąta rozwarcia.

Jest możliwe połączenie obydwu założeń uogólniających, tj. rezygnacji z prostopadłości "rzutni" p_2 do π_1 oraz skali 1:1 przy nanoszeniu wysokości punktów. Zasadnicza struktura rozważań i konstrukcji związanych z uogólniającymi założeniami pozostaje jednak niezmienna.

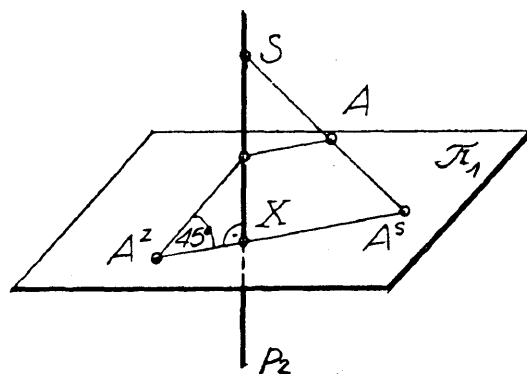
Kolejnym krokiem w kierunku uogólnienia jest założenie, że w miejsce rzutu normalnego (prostokątnego) rozpatruje się rzut środkowy z dowolnie obranego punktu S na rzutnię p_2 .

Zbadajmy konsekwencje takiego założenia dla kształtu powierzchni Γ , tj. powierzchni, której każdy punkt ma głębokość równą wysokości. Zmodyfikujmy przy tym pojęcie głębokości, którą określać będziemy nie jako odległość punktu od rzutni p_2 lecz jako odległość jego rzutu środkowego od analogu osi x - punktu X (rys. 15).

Rozpatrując relacje zachodzące w płaszczyźnie τ zawierającej promień rzutujący dowolnego punktu A stwierdzamy, że punkty powierzchni Γ skonstruować można jako punkty przecięcia homologicznych promieni dwóch pęków: o środku S oraz o środku T^∞ , gdzie $T^\infty \in \pi_1$. Pęki te rzutują przystające szeregi o podstawach a oraz p_2 , gdzie $a = \tau \cap \pi_1$ (rys. 16), są więc rzutowe.

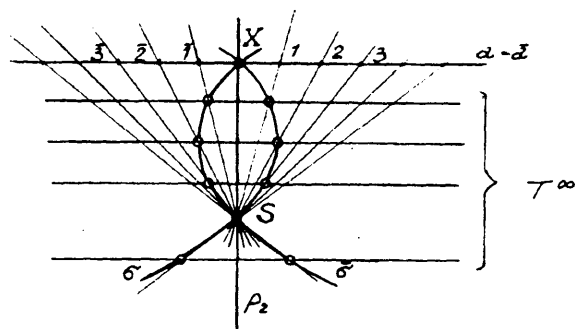


rys. 14



rys. 15

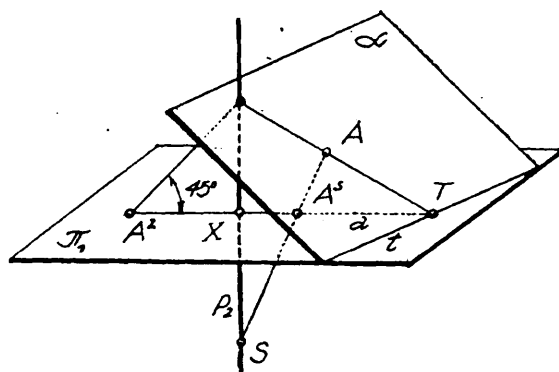
Wynika stąd, że punkty, których wysokość równa jest głębokości leżą na stożkowej σ . Stożkowa σ jest przy tym parabolą, gdyż promieniowi ST^∞ pęku (S) odpowiada styczna pęku (T^∞), która jest prostą niewłaściwą (łączącą T^∞ z niewłaściwym punktem prostej p_2).



rys. 16

Zwróćmy uwagę jednak, że punkty paraboli σ nie są jedynymi, które można by zakwalifikować do powierzchni Γ . Jeżeli na prostej a rozważymy szereg odwrotnie przystający do a ($1, 2, 3, \dots$), tj. $\bar{a}$ ($\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots$) - na podstawie analogicznych konstrukcji wyznaczmy parabolę $\bar{\sigma}$ symetrycznie położoną względem σ , której punkty również spełniają warunek równości dwóch współrzędnych: głębokości i wysokości. Wnosić więc możemy, że w płaszczyźnie τ punkty należące do powierzchni Γ leżą na dwóch parabolach: σ i $\bar{\sigma}$. Ponieważ w każdej płaszczyźnie zawierającej rzutnię p_2 zachodzi sytuacja identyczna - możemy ustalić, że zbiór punktów, które w rozpatrywanym odwzorowaniu (rzut środkowy na π_1 i rzut prostokątny na p_2) mają tę własność, że ich głębokości równe są wysokościami - wypełnia powierzchnię utworzoną przez obrót parabol σ i $\bar{\sigma}$, dookoła osi p_2 , czyli powierzchnię pierścieniową ρ , której kierującą są parabole, a osią obrotu - prosta p_2 .

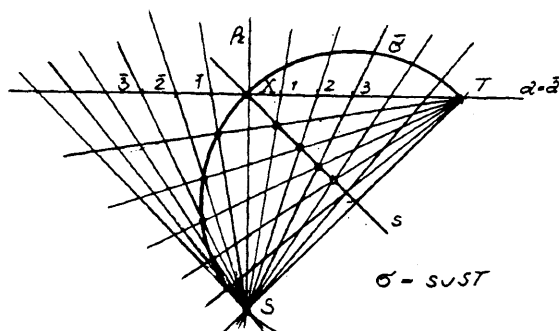
Rozpatrzmy jeszcze dalsze uogólnienie naszego odwzorowania wprowadzając rzut środkowy na π_1 o środku $S \in p_2$ oraz rzut na p_2 z prostej t obranej dowolnie na rzutni π_1 (rys.17).



rys. 17

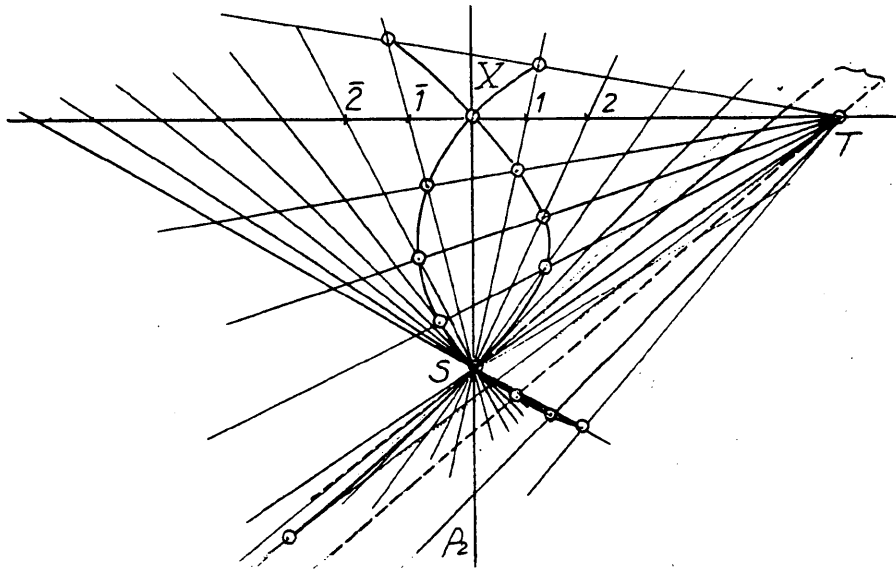
Zbadajmy co w tym przypadku będzie zbiorem punktów, których wysokości są równe głębokościom. Jak poprzednio, rozważmy relacje zachodzące w dowolnej płaszczyźnie $\tau \in p_2$. W płaszczyźnie takiej prezentowana metoda sprowadza się do dwóch rzutów środkowych - rzutu o środku S oraz rzutu o środku T , gdzie $T = \tau \cap t$. Punkty powierzchni Γ , tj. takie których wysokości są równe odpowiednim głębokościom powstają z przecięcia homologicznych promieni dwóch pęków: (S) i (T). Pęki te jako rzutujące przystające szeregi punktów o podstawach p_2 i a (gdzie $a = \tau \cap \pi_1$) są rzutowe, ich utworem zatem jest stożkowa σ . Rozpatrując jak poprzednio obok szeregu $a(1, 2, \dots)$ także odwrotnie przystający szereg $\bar{a}(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots)$ otrzymujemy dwie różne stożkowe σ i $\bar{\sigma}$ stanowiące przekrój płaszczyzną τ powierzchni Γ .

Zanalizujmy jeszcze rodzaj stożkowych σ i $\bar{\sigma}$. Łatwo widać, że gdyby odcinki SX i TX były równe - pęki (S) i (T) byłyby w przypadku ($\bar{a}$) przystające, a w przypadku (a) - odwrotnie przystające. Wyni-



rys.18

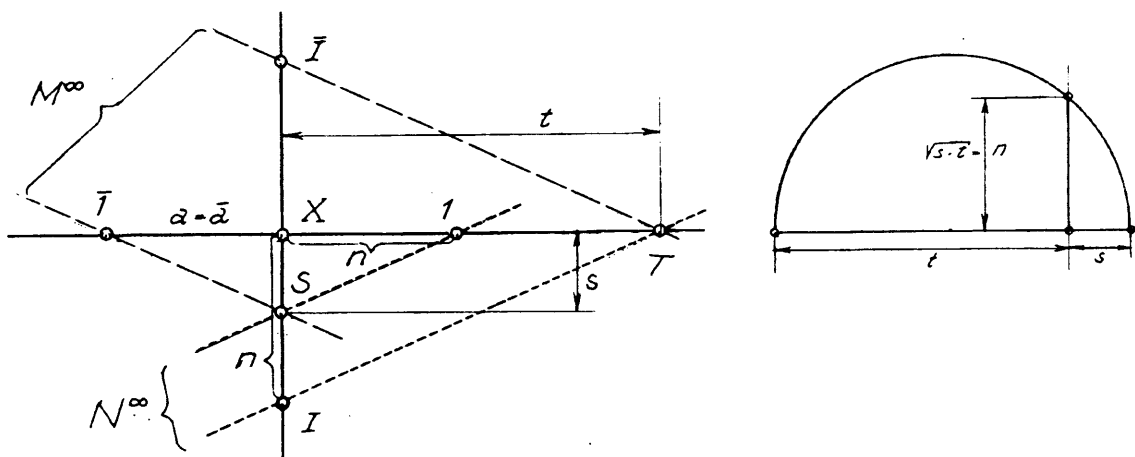
ka stąd natychmiast (rys. 18), że przy tak szczególnych założeniach stożkowa $\bar{\sigma}$ jest okręgiem, a stożkowa σ - hiperbolą równoboczną, zdegenerowaną do pary prostych: s i TS . Załóżmy teraz, że dokonujemy obrotu płaszczyzny τ dookoła osi p_2 , w miarę którego długość odcinka XT rośnie (rys. 19). Wówczas okrąg $\bar{\sigma}$ przekształca się w elipsę e , a hiper-



rys. 19

bola równoboczna σ - w hiperbolę nierównoboczną h . Przy osiągnięciu położenia $\tau // t$ punkt T staje się punktem niewłaściwym i otrzymujemy przypadek omówiony wcześniej. W przypadku tym obydwie stożkowe: elipsa e i hiperbola h przekształcają się w parabole o wspólnym środku T^∞ .

Przeprowadźmy jeszcze krótką dyskusję hiperboli h , w szczególności konstrukcji asymptot tej krzywej (rys. 20).



rys. 20

Zauważmy, że równoległość promieni pęków (S) i (T) ma miejsce wówczas kiedy w szeregach (a) i (p_2) zostanie uwzględniona para n, n tworząca wraz ze środkami pęków - punktami S i T trójkąty podobne: $\Delta XIS \sim \Delta XTI$

Z podobieństwa wnosimy, że: $\frac{n}{s} = \frac{t}{n} \rightarrow n^2 = s \cdot t$

Wynika stąd, że n jest średnią geometryczną iloczynu $s \cdot t$, gdzie s i t są odległościami środków S i T od punktu X . W związku z tym punkty niewłaściwe krzywej h , tj. kierunki; asymptot tej hiperboli można wyznaczyć jak na rys.20.

Podsumowując stwierdzamy, że w przypadku gdy odwzorowanie złożone jest z rzutu środkowego na rzutnię π_1 i rzutu z prostej $t \in \pi_1$ na "rzutnię" p_2 - powierzchnia Γ , której każdy punkt ma równe sobie wysokość i głębokość ma charakter powierzchni quasi-pierścieniowej. Jej przekrojem każdą płaszczyzną przechodzącą przez p_2 jest para krzywych stopnia drugiego.

Poświęcenie uwagi kształtowi i własnościom powierzchni Γ w kolejno prezentowanych metodach odwzorowań ma swoje uzasadnienie. Odwołując się bowiem do tych powierzchni można wyprowadzić nowe, być może w określonych przypadkach interesujące interpretacje przekrojów, punktów przebiecia i przenikań. Tak np. wyznaczenie punktów przecięcia się z sobą dwóch rzutów prostej a : zdegenerowanego a^z i środkowego a^s (bądź równoległego, prostokątnego) oznacza znalezienie punktów przebiecia tą prostą powierzchni Γ . Podobnie, wyznaczenie takich punktów dla pęku prostych jest równoważne z konstrukcją przekroju płaszczyzną (pęku) powierzchni Γ , a w rezultacie zagadnienie punktów przecięcia określonej krzywej przez prostą można sprowadzić do przestrzennej konstrukcji punktów przebiecia powierzchni Γ .

Rozpatrując odwzorowanie, w którym rzut zdegenerowany stożkowej jednoczy się z jej rzutem środkowym bądź równoległym możemy analizować linię przenikania dwóch powierzchni: stożkowej bądź walcowej z powierzchnią Γ . W przypadku bardziej skomplikowanego charakteru tej powierzchni problem może być interesujący.

Literatura:

- (1) Josef KOUNOVSKY - "Zborcené plochy" Wyd. Jednota Československých matematika fysiku, Praha, 1947.

THE DEGENERATION OF ONE OF PROJECTION PLANES IN THE METHOD OF MONGE

The special case of representation by means of Monge method is being considered, taking assumption that one of the projection planes is replaced by a straight line.

It is proved that the image of an arbitrary straight line is the curve of 4th order. There are any problems connected with so called bisecting surfaces. These surfaces being geometrical locus of equidistant from two projection planes (the one of them is degenerated to a straight line) points - in relation to the projection - apparatus have the form of cone, torus or quasi - torus.

The using of the bisecting surfaces seems to allow to solve many geometrical constructions.