Biuletyn Polskiego Towarzystwa Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Zeszyt 12 (2001), str.35 – 43

ANALITYCZNE OKREŚLENIE WSPÓŁRZĘDNYCH WĘZŁÓW KONSTRUKCJI PRĘTOWEJ Z NIEREGULARNEGO ROMBOEDRU

Jerzy MROCZKOWSKI [1/] **, Teresa ROMASZKIEWICZ-BIAŁAS**

Politechnika Wrocławska, ul. B. Prusa 53/55, 50 - 317 WROCŁAW,
Wydział Architektury, Zakład Geometrii Wykreślnej i Perspektywy Malarskiej

Praca zawiera propozycję pewnej zasady geometrycznej konstruowania kratownic przestrzennych. Zasada ta polega na podziale ścian 12 – ścianu rombowego. 12 – ścian ten składa się z 12 przystających rombów. W 6 wierzchołkach schodzą się 4 romby (rys.1), zaś w 8 wierzchołkach 3 romby. W ten wielościan można wpisać sześcian. Na rys. 1 jest to sześcian o wierzchołkach ***(B, P, H, N, D, R, G, L)*** i narysowany jest linią przerywaną. Oznaczamy ***b*** długość krawędzi tego sześcianu. Rozpatrujmy ścianę ***(H, J, M, N)*** 12–ścianu, zaś na tej ścianie trójkąt ***(H, J, H_1)*** (trójkąt zakropkowany na rys.1). Długość boku $\overline{H,H_1}$ wynosi :

$$\left|H,H_1\right| = \frac{b}{2},$$

długość boku H_1J jest to połowa przekątnej ściany sześcianu, zatem:

$$\left|H_1,J\right| = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Tak więc zgodnie z oznaczeniem na rys 1:

$$h = \frac{b}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

Oznaczamy ***a*** długości krawędzi 12–ścianu. Wtedy:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$$

Skąd po prostych przekształceniach:

$$a = \frac{b\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Oznaczamy φ wartość kąta $\sphericalangle HJH_1$ i obliczmy tangens, sinus i cosinus tego kąta

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

zaś:

$$\sin\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{4'}$$

[1/] E-mail address : mrocz@arch.pur.urvc.pl

ISSN 1505-2044 / zł 8.00

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad (4")$$

W położeniu 12–ścianu jak na rys 1. jego obrys w rzucie poziomym jest kwadratem.

Rozpatrujmy w 6–ścianie przekątną.

$$p = \overline{B,R}$$

Zauważmy, że następujące krawędzie 12–ścianu są równoległe do tej przekątnej:

$$\overline{A,D} \parallel \overline{H,M} \parallel \overline{G,K} \parallel \overline{J,N} \parallel \overline{F,L} \parallel \overline{P,T} \parallel \quad p$$

Wynika to z podobieństwa następujących trójkątów na rys. 1.

$$\Delta(B'',R'',P'') \cong \Delta(I'',P'',N'') \cong \Delta(P'',T'',N'') ...itd$$

Zatem jeżeli obrócimy 12–ścian w ten sposób, aby przekątna p znalazła się w położeniu pionowym, pionowe staną się także wymienione krawędzie 12–ścianu, zaś 6 jego ścian zawierających te krawędzie znajdzie się w położeniu poziomo – rzutującym.

W rezultacie obrysem 12–ścianu w rzucie poziomym będzie 6–kąt foremny (rys. 2).

Tak więc okazuje się, że konstruowanie przekrycia w oparciu o 12–ścian rombowy możliwe jest w dwóch przypadkach:

1. na rzucie kwadratu
2. na rzucie 6–kąta foremnego

Podzielmy bok rombu stanowiącego ściany 12–ścianu na *n* równych części. Otrzymamy n^2 rombów przystających i podobnych do ściany.

Wprowadźmy w tej siatce rombów przekątne równoległe jako krzyżulce. Otrzymujemy kratownicę o dwóch długościach prętów: długości boków rombów i długości przekątnych.

Celem naszym jest określenie współrzędnych wierzchołków tak zdefiniowanej kratownicy w obu wymienionych przypadkach.

Ad 1.

Oznaczmy d długość boku kwadratu stanowiącego rzut przykrywanego pomieszczenia i traktujmy tę wielkość jako daną oraz przyjmijmy układ współrzędnych ***Oxyz*** jak na rys. 1. Rozpatrujmy ścianę ***(A, B, H, J)***. Podzielmy bok $\overline{A,B}$ na *n* równych części i bok $\overline{A,H}$ na tę samą liczbę równych części. Oznaczmy *i* – numer punktu podziału na boku $\overline{A,B}$ **i** j – numer punktu podziału na boku $\overline{A,H}$, gdzie punkt A w obu podziałach ma nr = 0

$$i\,,j = 0,....n$$

Każdy węzeł kratownicy będziemy więc oznaczać $W_{i,j}$.

Napiszmy równanie kierunkowe prostej ***(A,B)*** leżącej w płaszczyźnie ***(x,z)***, tzn. równanie postaci:

$$z = \xi x + \nu \qquad (5)$$

Przede wszystkim wyrazimy długość krawędzi sześcianu b poprzez dane d. Z (1)

$$b = h\sqrt{2}\,,$$

ale

$$h = \frac{d}{2}\,,$$

więc:

$$b = \frac{d}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

Prosta ***(A,B)*** nachylona jest do osi $\boldsymbol{x}$ pod katem φ (rys. 1), jednak nas interesuje kąt **180° -** φ, zatem współczynnik kierunkowy wynosi

$$\xi = -\,tg\,\varphi$$

więc na podstawie (3):

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Punkt A ma współrzędną $z_A = b$, więc z (5)

$$\nu = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Ostatecznie

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

Przyrost Δx współrzędnej x wynosi

$$\Delta x = \frac{d}{2n},$$

zatem współrzędną x_i *punktu podziału na prostej* ***(A,B)*** o numerze i jest:

$$x_i = i\frac{d}{2n},$$

więc z (7)

$$z_i = -i\frac{d}{2n\sqrt{2}} + \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Oczywiście w tym przypadku dla każdego i

$$y_i = 0$$

Współrzędne z_j punktów podziału na prostej ***(A,H)*** maleją od $\frac{d}{\sqrt{2}}$ przyrostem:

$$-\Delta z = \frac{b}{2n} = \frac{d}{2n\sqrt{2}}$$

„Rzędy” ***(j****–te proste)* siatki kratownicy są to proste równoległe do prostej ***(A,B)*** przechodzące przez kolejne punkty j, więc ujemny przyrost współrzędnej z wynosi ν.
Z równania (5), uwzględniając (7) otrzymujemy:

$$z_i = -i\frac{d}{2n\sqrt{2}} + \frac{d}{\sqrt{2}} - j\frac{d}{2n\sqrt{2}} = d\left(\frac{-i + 2n - j}{2n\sqrt{2}}\right).$$

Współrzędne y_j dla poszczególnych „rzędów” siatki rosną z przyrostem

$$\Delta y = \frac{d}{2n}$$

więc dla rzędu j współrzędne wszystkich węzłów wynoszą:

$$y_j = j\frac{d}{2n}$$

Ostatecznie dla węzła $W_{i,j}$ są współrzędne:

$$\left.\begin{aligned} x_{i,j} &= i\frac{d}{2n} \\ y_{i,j} &= j\frac{d}{2n} \\ z_{i,j} &= a\left(\frac{2n-i-j}{2n\sqrt{2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ad 2.

Zakładamy, że w tym przypadku daną do obliczeń jest d – długość boku 6–kata foremnego stanowiącego rzut przykrywanego pomieszczenia. Przyjmijmy układ współrzędnych $Oxyz$ jak na rys.2. Obliczymy długość b krawędzi 6–ścianu. Rozpatrujmy $\Delta(J, H, J_1)$ (trójkąt zakropkowany na rys.2)

$$\angle J_1JH = 2\varphi,$$

zatem

$$\angle JHJ_1 = 90° - 2\varphi,$$

a więc:

$$\frac{d}{a} = \cos(90° - 2\varphi) = \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Uwzględniając (2) i (4) otrzymujemy:

$$\frac{d}{a} = \frac{d}{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

a stąd:

$$b = \frac{6d}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} \tag{9}$$

Znajdźmy współrzędną z_B punktu B. Rozpatrujmy $\Delta(B",O",P")$ w rzucie pionowym

Mamy:

$$/B",P"/ = b$$

oraz:

$$/O",P"/ = d$$

Stąd:

$$z_B = |O",P"| = \sqrt{b^2 - d^2},$$

$$z_B = \sqrt{\frac{36d^2}{4\cdot 2\cdot 3} - d^2} = \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

Mamy relacje:

$$z_A = \frac{d}{2\sqrt{2}} \tag{11}$$

Przystępujemy do wyprowadzenia wzorów na obliczanie współrzędnych węzłów kratownicy. Rozpatrujmy na 12–ścianie ścianę (A, B, H, J) na rys.2. Dzielimy bok $\overline{AB}$ na n równych części i bok $\overline{BJ}$ na tę samą liczbę części. Numerujemy punkty podziału oznaczając te numery na boku $\overline{A,B}$ jako i, zaś na boku $\overline{BJ}$ $-j$

$$i, j = 0,\ldots,n$$

Zakładamy, że w obu numeracjach punkt B ma **nr = 0**.

Wyprowadzimy równanie kierunkowe prostej $(A,B) \subset (x,z)$ w takiej postaci:

$$z = \xi (x - c_x) + c_z \tag{12}$$

gdzie:

$\xi = tg\ \mu$ – współczynnik kierunkowy prostej (rys.2),

$< c_x, c_z >$ – współrzędne dowolnego punktu leżącego na tej prostej.

Obliczmy **tg** μ (rys.2)

$$\text{tg}\ \mu = \frac{z_A}{d},$$

uwzględniając (11):

$$\text{tg}\ \mu = \frac{\frac{d}{2\sqrt{2}}}{d}$$

Tak więc:

$$\text{tg}\ \mu = \xi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Prosta (A,B) przechodzi przez punkt B o współrzędnych $\langle 0, \frac{d}{\sqrt{2}} \rangle$, czyli:

$$c_x = 0, \quad c_z = \frac{d}{2},$$

Zatem równanie tej prostej z (12):

$$z = \frac{1}{2\sqrt{2}} x + \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

Współrzędne x tej prostej zmieniają się $0 \to -d$, więc przyrost tej współrzędnej Δx wynosi:

$$-\Delta x = \frac{d}{n},$$

zaś współrzędna x i – tego punktu

$$x_i = -i \frac{d}{n} \tag{14}$$

Cała prosta ma numer $j = 0$.
Przepiszmy równanie (13) w postaci:

$$z_{i,o} = \frac{1}{2\sqrt{2}} x_{i,o} + \frac{d}{\sqrt{2}},$$

czyli:

$$z_{i,o} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-i \frac{d}{n} \right) + \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

Każda j – ta prosta jest równoległa do prostej (A,B) i ma stala współrzędną y. Współrzędne y_j zmieniają się $0 \to \frac{d\sqrt{3}}{2}$, zatem przyrost:

$$\Delta y = \frac{d\sqrt{3}}{2n} \Rightarrow y_j = j \frac{d\sqrt{3}}{2} \tag{16}$$

Zauważmy, ze przyrost współrzędnej x_i między prostymi o numerach j i $j+1$ jest polową boku trójkąta równobocznego o boku $\frac{d}{n}$, skąd:

$$x_{i,j+1} - x_{i,j} = \frac{d}{2n}$$

Tak więc przyrost Δx_j między punktem $x_{i,o}$ i punktem $x_{i,j}$ wynosi

$$\Delta x_j = x_{i,o} + j\frac{d}{2n}$$

jednak (14):

$$x_{i,o} = -i\frac{d}{n},$$

zatem

$$x_{i,j} = -i\frac{d}{n} + j\frac{d}{2n} \qquad (17)$$

Każda j–ta prosta jest równoległa do prostej (A,B), ale przechodzi przez j–ty punkt podziału na odcinku $\overline{B,J}$. Współrzędne $c_{x\,j}$ tych kolejnych punktów zmieniaja się $0 \to \frac{d}{2}$, zatem przyrost Δc_{xj} wynosi:

$$\Delta c_{xj} = j\frac{d}{2n} \qquad (18)$$

Współrzędne $c_{z\,j}$ tych punktów zmieniaja się

$$\frac{d}{\sqrt{2}} \to \frac{d}{2\sqrt{2}}$$

i przyrost Δc_{zj}:

$$-\Delta c_{zj} = j\frac{d}{2n\sqrt{2}} \qquad (19)$$

Przyrosty (18) i (19) uwzględnia w (15) i za x_{ij} podstawiamy (17)

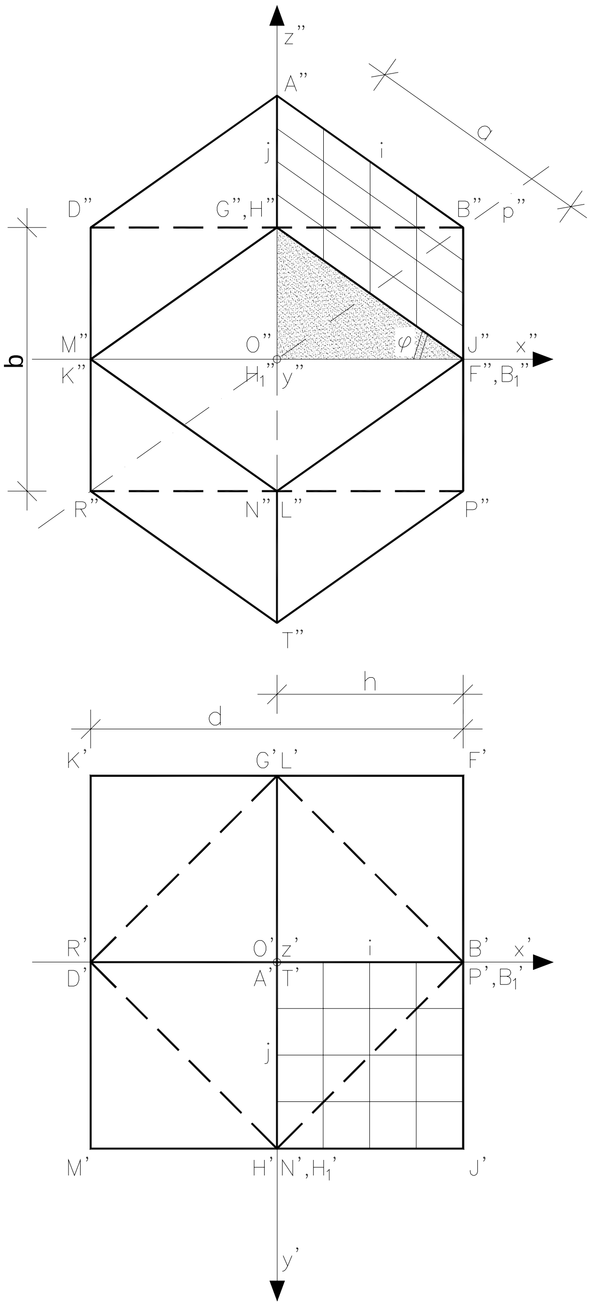
$$z_{i,j} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-i\frac{d}{n} + j\frac{d}{2n} - j\frac{d}{2n}\right) + \frac{d}{\sqrt{2}} - j\frac{d}{2n\sqrt{2}}$$

Ostatecznie więc:

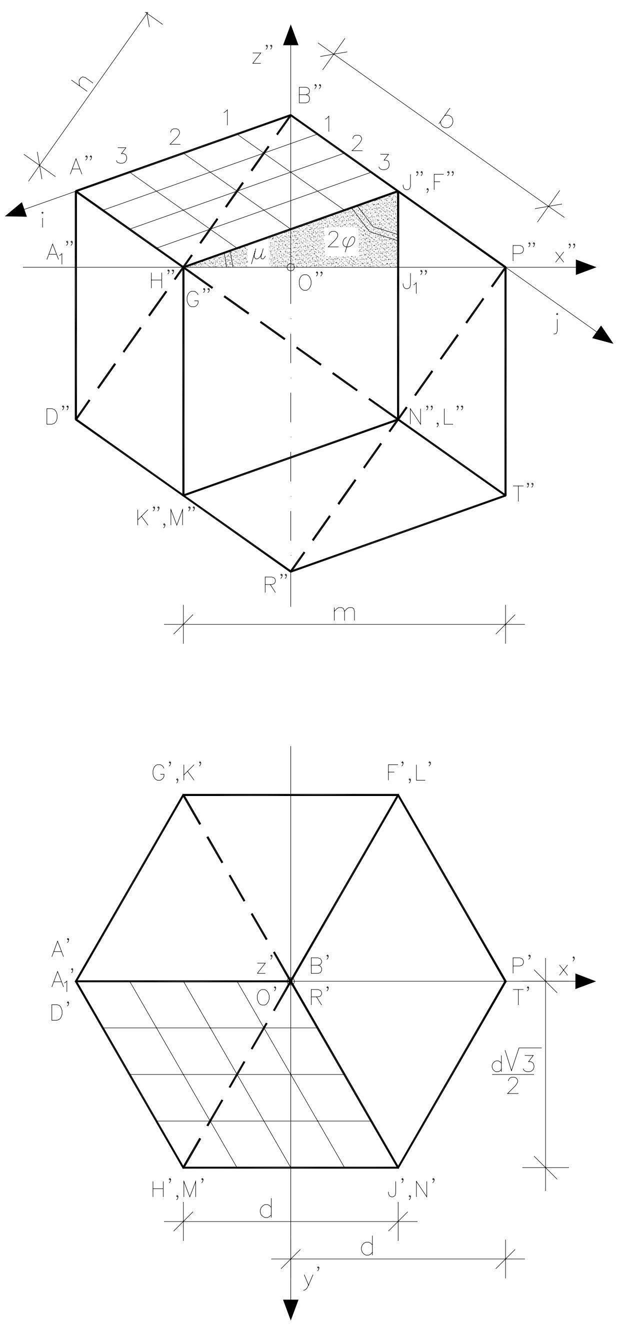
$$\left.\begin{aligned} x_{i,j} &= \frac{d}{n}\left(\frac{1}{2}j - i\right) \\ y_{i,j} &= j\frac{d\sqrt{3}}{2n} \\ z_{i,j} &= \frac{d}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1}{2n}(i+j)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

LITERATURA :

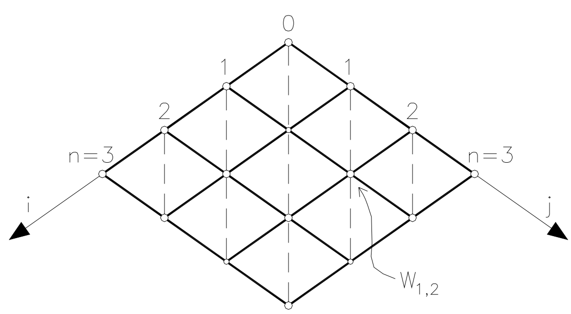
J. FULIŃSKI, A. PAC–POMARNACKA : *Rod constructions geometry of rhomb 12–hedrons and irregular rhombohedrons*, Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu nr 243.



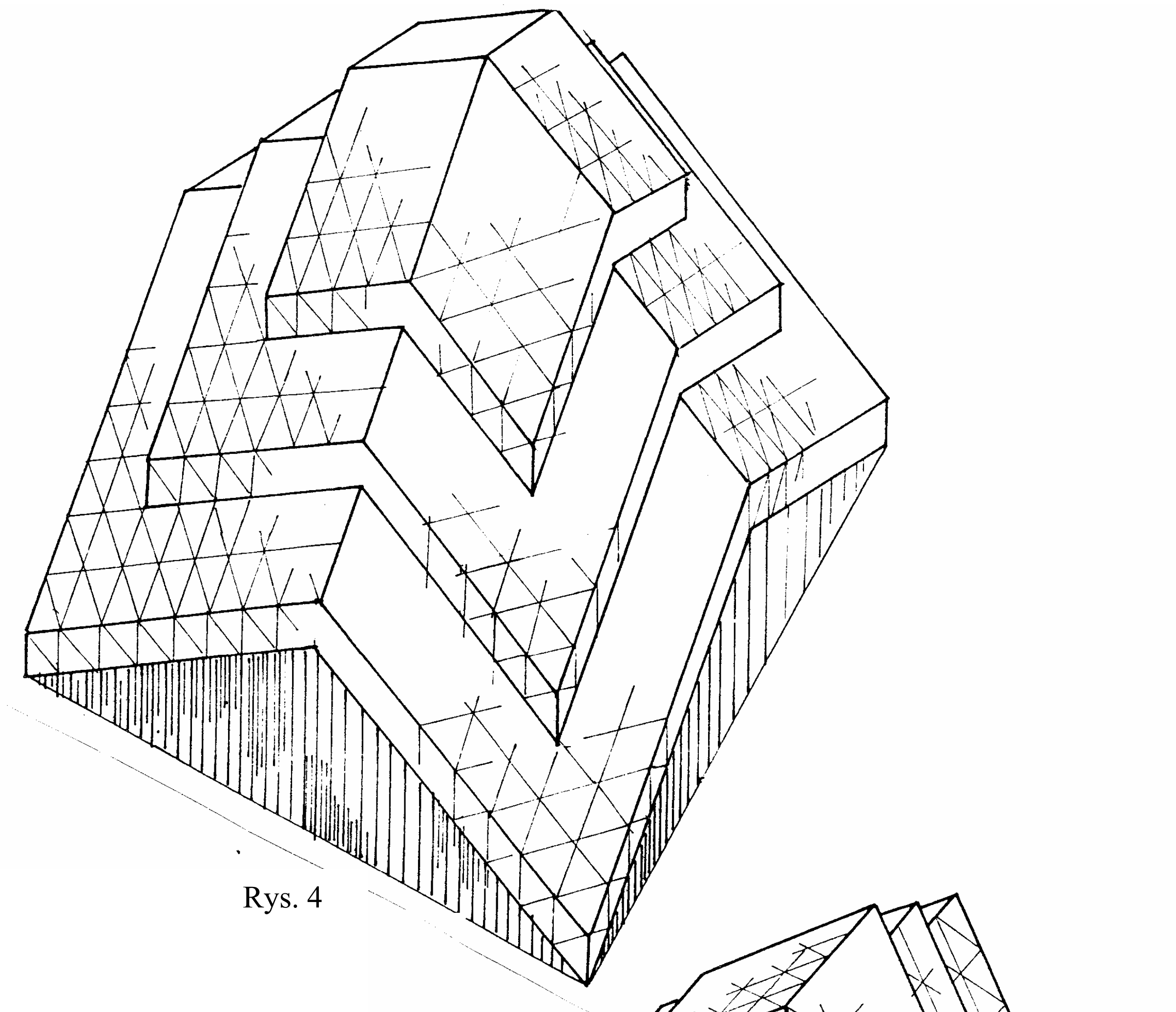
Rys. 1



Rys. 2

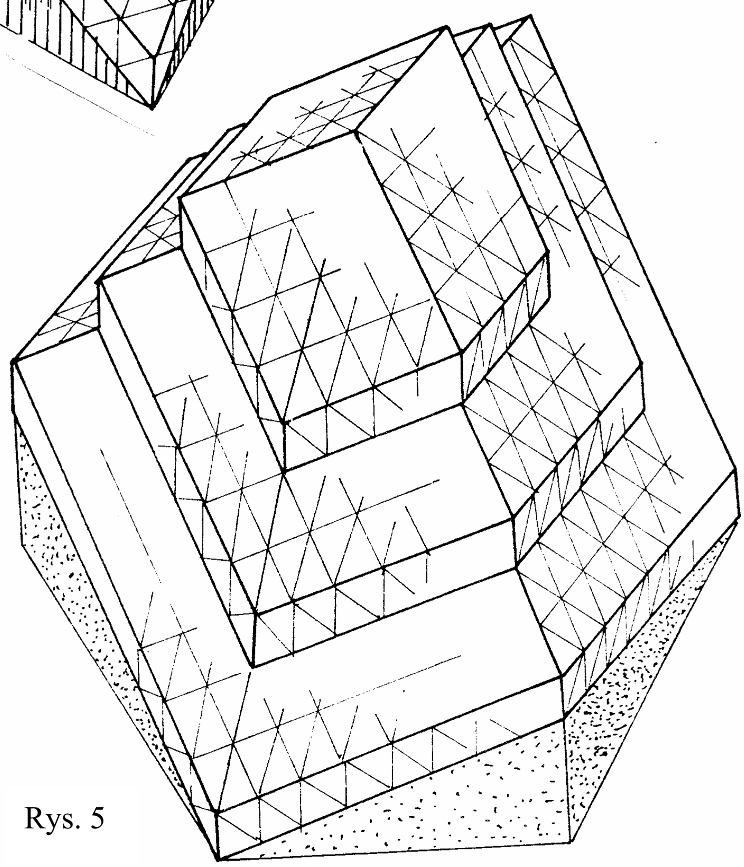


Rys. 3



Rys. 4

Przykłady zastosowania
nieregularnego romboedru
w budownictwie



Rys. 5

THE BASIS OF AN IRREGULAR RHOMBOHEDRON

In the study formulas have been derived, permitting to find the coordinates of joints of a space truss made by the partition of the walls of a rhombic dodecahedron /irregular rhombohedron/.

Constructing the cover /ceiling, roof/ of buildig structures on the basis of a rhombic dodecahedron is possible in two cases: in horizontal projection, they have the contour of a square, or a regular hexagon /Fig.1 and 2/.

Dividing the rhombic walls of a dodecahedron /Fig.3/ into „***n***" equal parts, we will obtain „***n***" of rhombi similar /homothetic/ to and congruent with the wall. If in this lattice of rhombi we introduce parallel diagonals as cross-braces, we will receiv a truss with two lengths of truss members: the length of sides of rhombi and the length of diagonals.

The aim of the study is to define the coordinates of nodes of thus defined truss for both above-mentioned contours of buildings: square and hexagonal.

For an assumed room covered with the abowe-mentioned truss the length of a square or hexahedral projection has been denoted „***d***" and co-ordinate system „***Oxyz***" successively as in Fig. 1 and 2 assumed. Naming „***i***" and „***j***" the divided sides of rhombic walls into „***n***" of equal parts as in Fig. 3, each truss joint has been denoted „$W_{i,j}$" /$i,j=0,...n$/. After transformations and on analysis of the made assumptions the coordinates of truss joints finally equal to:

1) for the building of a square plan

$$x_{ij} = i\frac{d}{2n}$$
$$y_{ij} = j\frac{d}{2n}$$
$$z_{ij} = d\left(\frac{2n-i-j}{2n\sqrt{2}}\right)$$

2) for the building of a hexagon plan

$$x_{i,j} = \frac{d}{n}\left(\frac{1}{2}j - i\right)$$
$$y_{i,j} = j\frac{d\sqrt{3}}{2n}$$
$$z_{i,j} = \frac{d}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{1}{2n}(i+j)\right]$$

Wpłynęło do redakcji w grudniu 2001 r.