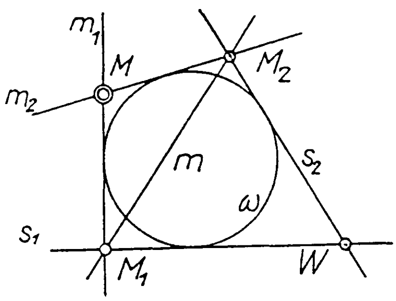
Marian PALEJ
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechniki Śląskiej

DYSKUSJA NIEKTÓRYCH OBRAZÓW W ELEMENTARNYM, ZDEGENEROWANYM PRZEKSZTAŁCENIU STOPNIA CZWARTEGO.

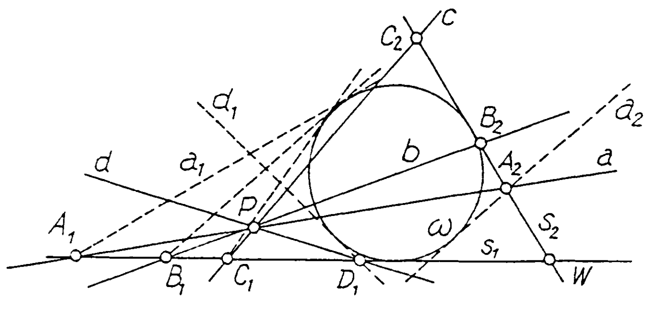
W pracy rozważa się przekształcenie oparte na następującym działaniu. Niech dana będzie dowolna stożkowa liniowa (stożkowa stycznych), w szczególności okrąg ω oraz dwie wyróżnione w niej styczne s_1, s_2. Dowolnej prostej m płaszczyzny okręgu ω przyporządkowuje się punkt M uzyskany w wyniku kolejnych konstrukcji:

1) przecięcia prostą m stycznych s_1, s_2 tj. punktów: $m \cap s_1 = M_1$; $m \cap s_2 = M_2$;
2) wyznaczenia pozostałych stycznych do okręgu w punktach M_1, M_2, tj. prostych m_1, m_2;
3) ustalenie punktu wspólnego stycznych m_1, m_2.

Punkt $M = m_1 \cap m_2$ stanowi obraz prostej m.

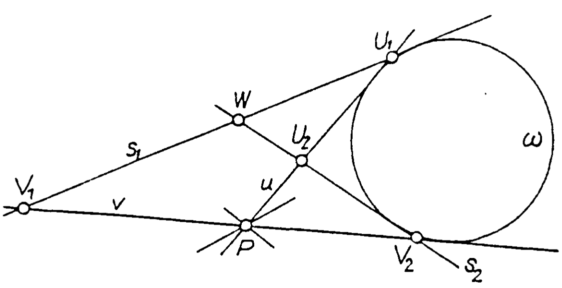


rys. 1



rys.2

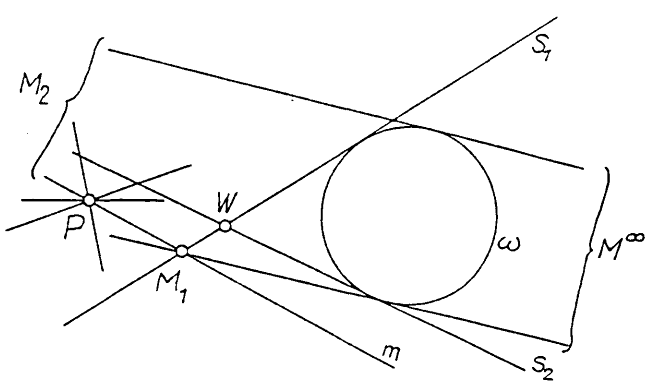
Zauważmy, że obrazem pęku prostych o środku P (rys. 2.) jest utwór powstały z przecięcia odpowiadających sobie prostych w dwóch rzutowych pękach prostych klasy drugiej. Pęk (P) bowiem wycina na stycznych s_1 i s_2 perspektywiczne szeregi punktów s_1 (A_1, B_1, C_1, ...), s_2 (A_2, B_2, ...), a te z kolei wyznaczają perspektywiczne z nimi pęki stycznych do ω, stanowiące pęki klasy drugiej: pęki $\omega_1(a_1, b_1 \ldots)$, $\omega_2(a_2, b_2 \ldots)$, o wspólnej podstawie ω. Wiadomo, że utworem punktów wspólnych elementów homologicznych w dwóch rzutowych pękach klasy drugiej jest krzywa rzędu czwartego c^4. W rozpatrywanym jednak przypadku zauważymy, że elementem c^4 (składnikiem tej krzywej) są dwie proste u i. v styczne do stożkowej ω i przynależne do punktu P (rys. 3). Istotnie bowiem jeżeli np. różna od s_1 styczna w punkcie $V_1 = v \cap s_1$, a także - różna od s_2 styczna w punkcie $V_2 = v \cap s_2$ pokrywają się z prostą v, to fakt ten oznacza, że v jest jednocześnie swoim rozciągłym obrazem V. Tak więc prosta v (a podobnie i u) jest elementem obrazu pęku prostych (P) - krzywej c^4.



rys. 3

Wynika stąd jasno, że pozostałą częścią (składnikiem) krzywej c^4 jest stożkowa π. Mamy więc do czynienia ze znanym zresztą faktem ustalającym, że punkty przecięcia się odpowiadających sobie stycznych dwóch rzutowych pęków klasy drugiej, o wspólnej podstawie, tworzą. krzywą stopnia drugiego.

W pracy podjęto próbę odpowiedzi na pytanie czy i kiedy stożkowa π będzie zawierała punkty niewłaściwe. Analizę tego problemu można oprzeć na następującym rozumowaniu.

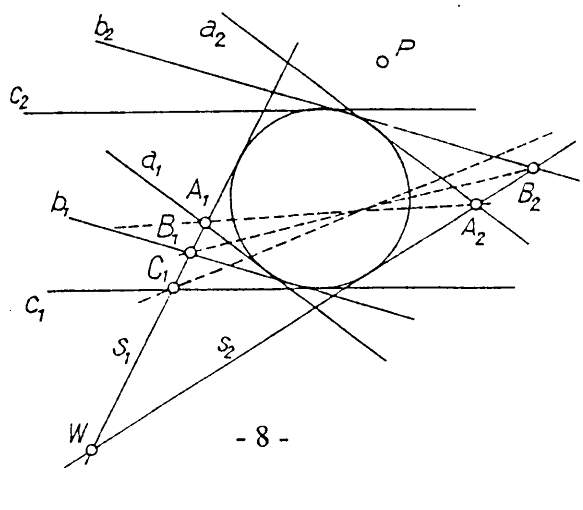


rys. 4

Przyjmijmy punkt P (rys. 4) wewnątrz tego samego kąta stycznych s_1 i s_2,wewnątrz którego leży stożkowa ω. Odpowiedzieć na pytanie czy , obraz pęku prostych (P) posiada punkt (punkty) niewłaściwy oznacza potwierdzić lub zanegować istnienie takiej prostej $m \in P$, że jeżeli $m \cap s_1 = M_1$, $m \cap s_2 = M_2$, to styczne do ω przynależne do M_1 i M_2, różne od s_1 , s_2 są do siebie równoległe. Inaczej mówiąc należy rozważyć możliwość kontstrukcji takiej prostej m.

Rysują się przy tym dwie drogi: 1) rzutowa, 2) ta, której realizacja nie wymaga znajomości geometrii rzutowej.

1) W tej pierwszej wystarczy skonstruować pary stycznych do okręgu ω równoległych np. $a_1 || a_2$, $b_1 || b_2$, ... (rys. 5).



rys. 5

Styczne te tworzą pęki klasy drugiej o wspólnej podstawie ω, rzutowe względem siebie. Mamy więc $\omega_1 (a_1, b_1, ...) \;\overline{\wedge}\; \omega_2 (a_2, b_2, ...)$; $\omega_1 = \omega_2$. Proste pęków (ω_1) i (ω_2) wycinają na stycznych do okręgu ω wyróżnionych prostych s_1, s_2 rzutowe względem siebie szeregi punktów $s_1 (A_1, B_1, ...)$ i $s_2 (A_2, B_2, ...)$. Proste łączące homologiczne punkty szeregów (s_1), (s_2) tworzą stożkową liniową (stożkową stycznych) σ. Przez każdy punkt płaszczyzny okręgu przechodzą dwie styczne do stożkowej σ. Każda z nich przynależna do punktu P spełnia warunki prostej m.

Są przy tym oczywiście możliwe trzy przypadki: a) styczne do stożkowej σ są rzeczywiste i różne i wówczas obrazem pęku jest hiperbola,

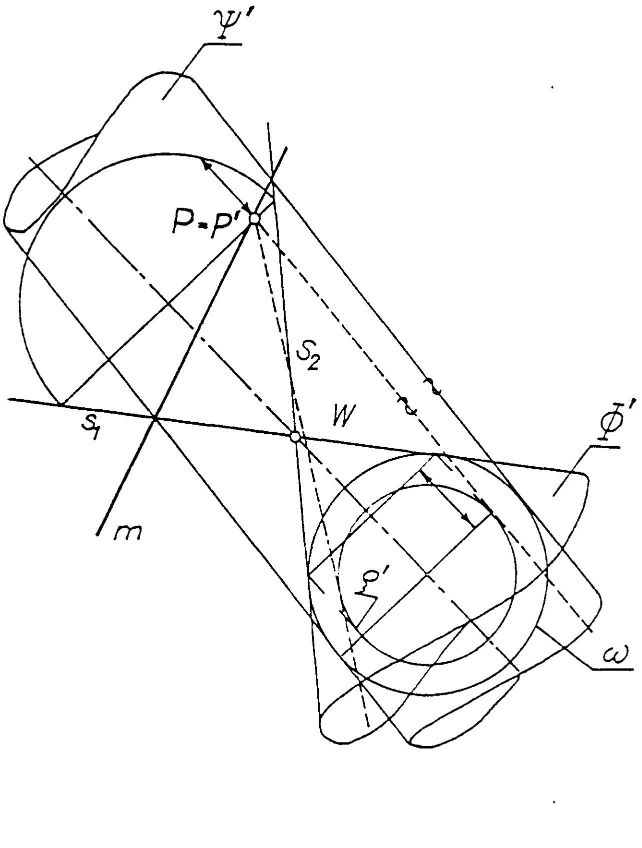
b) styczne są rzeczywiste, ale pokrywające się - w tym przypadku obrazem pęku (P) jest parabola,

c) wówczas kiedy styczne są nierzeczywiste - obraz pęku staje się elipsą.

Konstrukcja stycznych do stożkowej σ przechodzących przez punkt P nie jest jednak prosta i wymaga zastosowania dwoistego odpowiednika konstrukcji Steinera. W sumie więc drogę rzutową rozwiązania postawionego problemu można uznać za mało zachęcającą.

Znacznie prostsze rozwiązanie oferuje inne rozumowanie odwołujące się do konstrukcji linii przenikania powierzchni stopnia drugiego o szczególnym położeniu.

2) Zauważmy, że wyznaczenie prostej m spełniającej opisane warunki można by zinterpretować (rys. 6) jako skonstruowanie w rzucie (na płaszczyznę okręgu ω) linii przenikania powierzchni stożkowej Φ o tworzących s_1, s_2 i opisanej na kuli o równiku ω z powierzchnią walcową Ψ opisaną na tej samej kuli i o osi leżącej w płaszczyźnie okręgu ω.



rys.6

Wówczas szukane styczne do okręgu ω byłyby zwyczajnie tworzącymi tej powierzchni. Rzuty linii przenikania powierzchni Φ i Ψ stanowiącej parę elips spełniałyby warunki stawiane prostej m. Tworząca powierzchni Ψ przynależna do punktu P ustalałaby położenie punktu niewłaściwego obrazu pęku (P).

Jeżeli punkt P jest dany, konstrukcję takiej tworzącej (tworzących) można zrealizować wykonując następujące, kolejne działania:

1) Znaleźć wysokość punktu P przyjmując, że jest on rzutem punktu powierzchni stożkowej Φ.

2) Wyznaczyć zbiór punktów sfery Ω, której równikiem jest okrąg ω - o wysokości punktu P, to jest równoleżnik ρ.

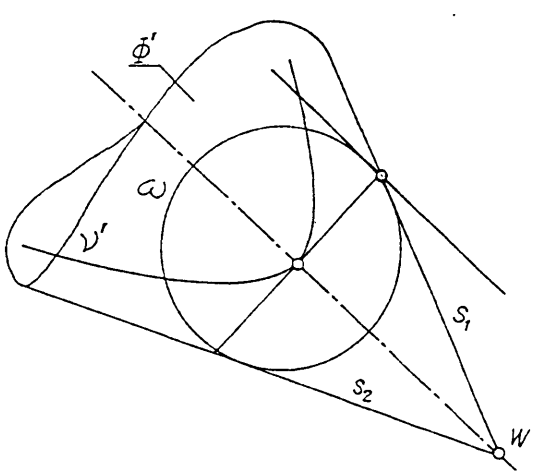
3) Skonstruować styczne do równoleżnika ρ przechodzące przez punkt P. Każda z tych stycznych może być uważana za rzut odpowiednich tworzących powierzchni walcowej Ψ, a jej punkt niewłaściwy jest punktem niewłaściwym obrazu pęku (P).

Jest przy tym oczywiste, że jeżeli punkt P wybrany będzie w takim położeniu, że jego wysokość (jako punktu leżącego na powierzchni stożkowej Φ) jest większa od promienia sfery (tj. od promienia okręgu ω), zadanie nie ma rozwiązania, co oznacza, że obraz pęku (P) nie posiada punktów niewłaściwych.

Jeżeli punkt P wybrany został tak szczególnie, że jego wysokość jest równa promieniowi sfery Ω istnieje jedna tylko powierzchnia walcowa Ψ spełniająca stawiane jej warunki, a w konsekwencji jeden tylko punkt niewłaściwy w obrazie pęku (P). Stożkowa π jest wówczas parabolą.

Opisane działania uzasadniają następujący, podsumowujący sposób analizy rodzaju stożkowej π stanowiącej obraz pęku (P).

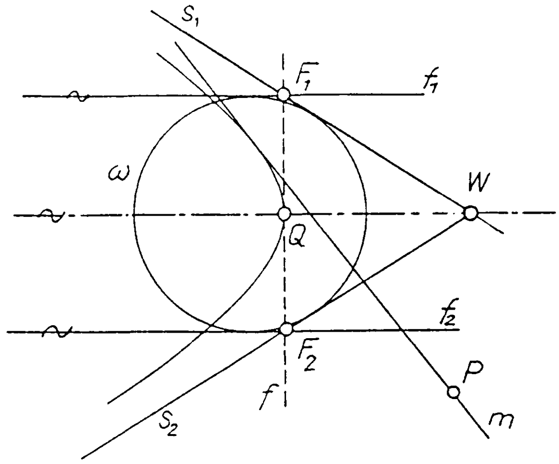
Należy znaleźć (rys. 7) przekrój powierzchni stożkowej Φ płaszczyzną „poziomą" (równoległą do płaszczyzny okręgu ω) o wysokości równej promieniowi sfery Ω. Jest nim oczywiście hiperbola np. ν. Punkty leżące na tej krzywej są takimi środkami pęku (P), których obrazami



rys. 7

są parabole. Punkty leżące w obszarze pomiędzy hiperbolą ν i jej asymptotami (czyli stycznymi bazy s_1, s_2) to rzuty punktów powierzchni Φ, których wysokości są mniejsze od promienia sfery Ω. Przez punkty takie mogą przechodzić rzuty odpowiednich tworzących powierzchni walcowych Ψ_i i jeżeli są one środkami pęków (P_i) - obrazami tych pęków są hiperbole. Wreszcie punkty leżące wewnątrz hiperboli ν to rzuty punktów o wysokościach większych od promienia sfery Ω. Nie istnieją proste przechodzące przez nie stycznie do sfery Ω i równolegle do płaszczyzny równika (tj. nie istnieją tworzące odpowiednich powierzchni walcowych Ψ_i). W konsekwencji, obrazy pęków, których środkami są punkty wewnętrzne hiperboli ν są zawsze elipsami.

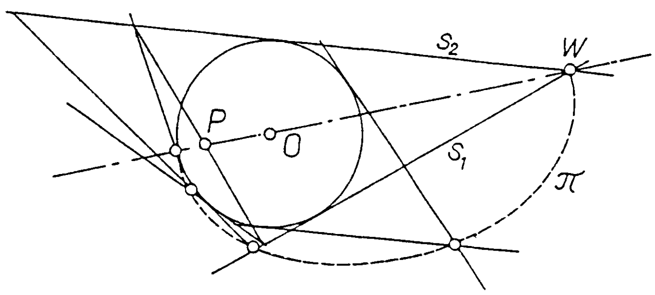
Pozostaje jeszcze kwestia punktów P_i zawartych w drugim kącie utworzonym przez styczne s_1 , s_2 . Nie nadaje się do nich interpretacja związana z przenikaniem powierzchni stożkowej Φ o tworzących s_1 , s_2 , opisanej na kuli Ω. Można jednak zauważyć, że stożkowe σ z rys. 5 i ν z rys. 7 są identyczne. Istotnie bowiem mają wspólne asymptoty oraz styczną f w punkcie (wierzchołku) Q. Wynika to jasno z konstrukcji wierzchołka oraz z konstrukcji homologicznych punktów szeregów (s_1) , (s_2) wyciętych przez styczne do okręgu ω równoległe do osi powierzchni stożkowej (osi głównej hiperboli ν - rys. 8). Uwaga dotycząca identyczności σ i ν upraszcza konstrukcję ewentualnie poszukiwanych punktów niewłaściwych pęku prostych o środku P. Wystarczy z punktu P skonstruować styczne do hiperboli ν (która została już wcześniej wyznaczona) . Każda z tych stycznych spełnia rolę opisanej wcześniej prostej m .



rys. 8

Rozważmy jeszcze przypadki szczególnego położenia punktu P względem okręgu ω oraz punktu W:

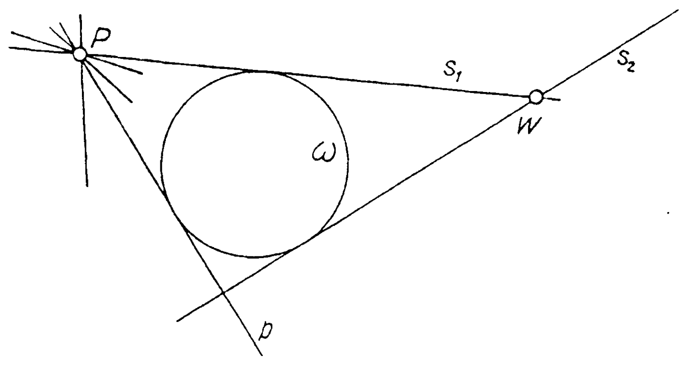
1) niech: $P \in WO$ (gdzie O jest środkiem okręgu ω) - rys. 9 . W przypadku kiedy $P \neq W$ i $P \neq O$, jako wynik założonej przynależności $P \in WO$ rejestrujemy jedynie symetrię obrazu pęku (P) tj. stożkowej π względem prostej WO. Prosta ta jest odpowiednio osią hiperboli, paraboli lub elipsy.



rys. 9

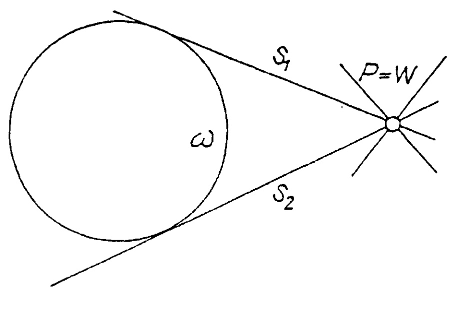
2) Niech $P \in s_1$.

W takim przypadku proste pęku (P) przecinając pozostałą styczną s_2 (rys. 10) generują tylko jedną rodzinę stycznych. Pozostała degeneruje się do prostej p . W wyniku - zbiór punktów przecięcia się odpowiadających sobie stycznych pokrywa prostą p , która w tym przypadku



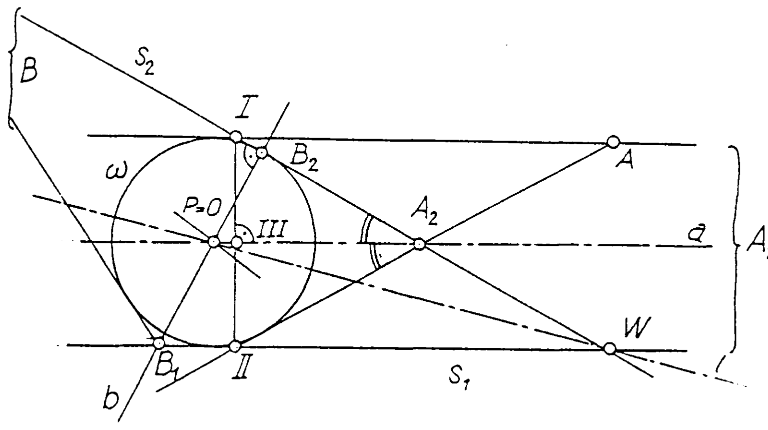
rys. 10

jest jednocześnie swoim rozciągłym obrazem (porównaj proste u, v ze str. 5 - rys.3) oraz zbiór obrazów nieskończenie wielu pozostałych prostych pęku (P).
Podobny wniosek dotyczy prostej s_1 . Jako prosta „typu" u , v z rys. 3 jest sama swoim rozciągłym obrazem S_1. Ponadto jednak uwzględniając, że w każdym punkcie „przecina się" sama z sobą możemy przeprowadzić następujące rozumowanie : rozważmy np. prostą $i = s_1$ i weźmy pod uwagę jej punkty przecięcia $i \cap s_1 = I_1$; $i \cap s_2 = I_2$. Zgodnie z powyższą uwagą punkt I_1 może być dowolnym punktem prostej s_1, a punkt $I_2 = W$. Konstruujemy styczne w tych punktach do okręgu ω . Styczna przynależna do W i różna od s_2 to prosta s_1 , a styczna przechodząca przez I_1 i różna od i_1, to prosta np. a. Obrazem prostej $i = s_1$ jest punkt $a \cap s_1 = I_1$. Rozumując podobnie w odniesieniu do innych punktów prostej s_1 wnosimy, że prosta ta usłana jest punktami przecięcia z rodziną (a_i) stycznych do ω . Możemy zatem powiedzieć, że winna być liczona podwójnie.
Reasumując ustalamy, że w rozpatrywanym przypadku stożkowa π degeneruje się do dwóch prostych p i s_1 ,a krzywa c^4 - do podwójnie liczonych tych prostych.
3) W przypadku kiedy $P=W$ (rys. 11) można powtórzyć rozumowanie z punktu 2. Wynika stąd,że przy tak szczególnie przyjętym położeniu środka P obrazem pęku (P) jest para stycznych s_1 i s_2.



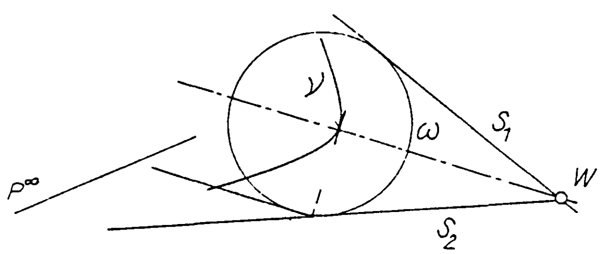
rys. 11

4) Niech : $P = O$ (rys. 12). Pierwsza narzucająca się uwaga w tym przypadku dotyczy symetrii obrazu pęku (P) względem osi:



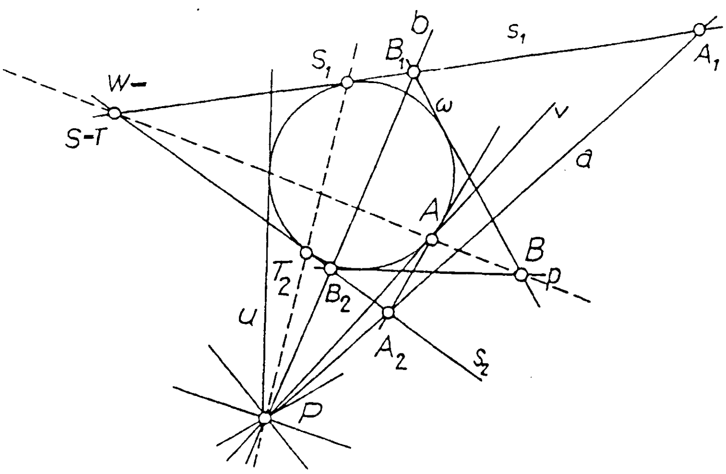
rys. 12

Bliższa analiza konstrukcji obrazów poszczególnych prostych pęku wydaje się podpowiadać, że stożkowa stanowiąca obraz pęku jest okręgiem współśrodkowym z ω.
Dowód tej właściwości można przeprowadzić następująco. Weźmy pod uwagę jako prostą pęku - prostą $a \parallel s_1$ i skonstruujmy jej obraz A. Zauważmy, że powstałe w trakcie konstrukcji trójkąty $I A_2 III$ i $II A_2 III$ są przystające. Istotnie bowiem zachodzi:
$\angle I A_2 III = \angle II A_2 III$, $\angle I\, III A_2 = \angle II\, III A_2 = \pi/2$ i $\overline{A_2 III} = \overline{A_2 III}$. Stąd jednak natychmiast wnosimy o przystawaniu trójkątów $I\, II\, A$ i $II\, I\, W$, a w rezultacie o równości odcinków WO i AO. Pozwala to na stwierdzenie, że odległość punktu A od środka okręgu O jest taka sama jak odległość W od tegoż środka. W dalszej kolejności rozważmy prostą b pęku (P), prostopadłą do stycznej s_2 tj. przechodzącą przez punkt styczności. Jej obraz B leży na prostej s_2 i jak to łatwo odczytać z rysunku (punkt O leży na wysokości trójkąta równoramiennego $W B_1 B$) odległość tego obrazu od środka O jest równa odległości od środka punktu W. Mamy więc $\overline{WB} = \overline{BO}$.
Odwołując się do symetrii można wskazać dalsze dwa punkty C, D rozpatrywanej stożkowej takie, że : $\overline{CO} = \overline{WO} = \overline{DO}$. Ustaliliśmy więc, że pięć punktów stożkowej π jest jednakowo odległych od środka O. Fakt taki wystarcza aby stwierdzić, że stożkowa ta jest okręgiem współśrodkowym z ω.
5/ Niech : $P \in f^\infty$.
Przypadek taki (rys. 13) nie różni się zasadniczo od przypadku najogólniejszego. W zależności od tego czy jest to punkt leżący wewnątrz czy też na zewnątrz hiperboli ν (por. str. 7), obrazem pęku prostych o środku P^∞ będzie elipsa lub hiperbola.



rys. 13

Nie może jedynie wystąpić parabola. Wówczas bowiem, jak to wcześniej ustalono, środek P^∞ musiałby być punktem hiperboli ν. Spełniając jednak warunek podstawowy: $P \in f^\infty$, punkt taki musiałby leżeć na jednej z asymptot hiperboli ν, tj. na prostej s_1 lub s_2. Ten jednak przypadek omówiono w punkcie 2) i wiadomo, że przy tak określonych założeniach obraz pęku prostych degeneruje się do dwóch prostych stycznych do okręgu ω.
6) Niech punkt P przyjęty będzie na prostej łączącej punkty styczności okręgu ω do prostych bazy s_1, s_2 (rys. 14).



rys. 14

Zauważmy, że przy ogólnych założeniach proste pęku (P) przechodzące przez punkty S_1 , T_2 pozwalają wyznaczyć takie punkty S i T, w których stożkowa π (obraz pęku (P)) przecina proste s_1 , s_2. W rozpatrywanym przypadku punkty S i T jednoczą się z punktem W. Oznacza to, że obrazem pęku prostych spełniającego warunek 6) jest prosta (dokładniej mówiąc jest to para półprostych o wspólnej podstawie, których końce są punktami przecięcia tej podstawy okręgiem ω) . Konstrukcja potwierdza ten wniosek dodatkowo ujawniając, że prosta p (tj. zdegenerowana stożkowa π) tworzy czwórkę harmoniczną z prostymi PW, s_1 , s_2. Wynika to z własności czworokątów zupełnych , w których punktami przekątnymi są: punkt W, środek pęku P oraz obrazy odpowiednich prostych pęku (P). Sytuacja nie zmienia się w sposób istotny , jeżeli jako środek pęku (P) przyjąć punkt niewłaściwy, a także jeżeli punktem niewłaściwym będzie punkt bazy: $W = s_1 \cap s_2$.

THE IMAGES OF THE STRAIGHT LINE PINCILS IN A DEGENERATED TRANSFORMATION OF 4th ORDER

In the paper a plane transformation with one circle and two it's distinguished tangents s_1 and s_2 as basis, is considered. The image of a straight line m is the common point of two tangents to basic circle, they pass through the intersecting points $M_1 = m \cap s_1$ and $M_2 = m \cap s_2$. It is proved that the images of the pencil straight lines ly on the conic π . The kind of conic π (ellipse, parabola, hyperbola) and it's construction in relation to the location of pencils center is discussed.